УДК 539.3

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Демпфірування неізотермічних осесиметричних згинних коливань в'язкопружних пластин

Damping of unisothermal axisymmetric bending vibrations of viscoelastic plates

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Розглядається задача про вимушені моногармонічні осесиметричні згинні коливання та дисипативний розігрів круглої в'язкопружної пластини з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. В'язкопружна поведінка пасивного (без п'єзоефекту) і п'єзоактивного матеріалів описується за допомогою концепції комплексних модулів, що залежать від температури.

Ключові слова: активне демпфірування, сенсори, актуатори.

A problem on the forced monoharmonic axisymmetric bending vibrations and dissipative heating of circular viscoelastic plate with the piezoelectric sensors and actuators is considered. Viscoelastic behavior of passive (without piezoeffect) and piezoactive materials is described using the concept of complex moduli which depend on temperature. The nonlinear coupled problem of electrothermoviscoelasticity is solved by numerical methods. The influence of the boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of harmonic vibrations of thin viscoelastic plates with the simultaneous use of sensors and actuators is investigated. For modeling viscoelastic properties of passive and piezoelectric materials, linear models of integral type viscoelasticity are used, which are most effective for simulating the dissipative properties of materials in the linear region. If the material characteristics depend on temperature, investigation of the influence of temperature of dissipative heating is reduced to solution of complicated non-linear systems of differential equations.

Key Words: active damping, sensors, actuators.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Компонентами різних конструкцій є тонкі пластини із різних матеріалів, у тому числі із полімерів та композитів на їх основі, що знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Температурні ефекти особливо важливі для пластин з полімерних матеріалів і композитів на їх основі, які дуже чутливі до зміни температури. У даній статті розглядаються вимушені моногармонічні згинні коливання круглої тришарової пластини несиметричної будови, в якій один із зовнішніх п'єзоелектричних шарів виконує роль сенсора, а другий - актуатора. При резонансних коливаннях та високих рівнях механічних навантажень виникає необхідність врахування впливу фізичної нелінійності, дисипативних властивостей матеріалів і температури дисипативного розігріву на ефек-

тивність роботи сенсорів та актуаторів, а також на ефективність активного демпфірування коливань тонких пластин за їх допомогою.

Постановка задачі

Розглянемо тришарову круглу пластину радіуса r , внутрішній шар товщини h_3 якої виготовлений із пасивного (без п'єзоефекту) матеріалу, а її зовнішні поверхні $z = \pm h_3/2$ жорстко скріплені з поляризованими по товщині п'єзокерамічними шарами, радіуса $r_0 \leq r$ і товщинами h_2 і h_1 відповідно. Матеріали пасивного і п'єзоактивного шарів вважаються в'язкопружними. На зовнішні поверхні п'єзошарів, а також на поверхні, які контактують з пасивним шаром, нанесено суцільні дуже тонкі електроди. Внутрішні електроди підтримуються при нульо-

вому потенціалі. Вважаємо, що п'єзоактивний шар товщини h_1 є актуатором, а п'єзощар товщини h_2 виконує роль сенсора. Пластина навантажена поверхневим тиском $\tilde{P} = P(r)\cos\omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з круговою частотою ω , близькою до резонансної.

До електродів актуатора підводиться різниця електричних потенціалів $\Phi_1(-h_3/2) - \Phi_1(-h_3/2 - h_1) = \operatorname{Re}(V_A e^{i\omega t})$ з тією ж частотою, що й механічне навантаження. У випадку розімкнутих електродів сенсора, внаслідок дії на пластину гармонічного навантаження, на електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів комплексної амплітуди $V_S = V'_S + iV''_S$, яку необхідно визначати за допомогою чисельних розрахунків або заміряти приладом. В'язкопружна поведінка пасивного і п'єзоактивного матеріалів при моногармонічному деформуванні описується згідно концепції комплексних модулів [2], дійсна та уявна частини яких залежать від температури дисипативного розігріву. При моделюванні електромеханічних коливань пластини відносно механічних змінних приймаємо гіпотези Кірхгофа-Лява, які виконуються уздовж товщини пакету шарів. Припускаємо, що складовими векторів індукції D_r, D_θ і напруженості E_r, E_θ електричного поля у площині кожного п'єзощару можна знехтувати. Із рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова вектора індукції є постійною величиною по товщині п'єзощару, так що $D_{zm} = C_m(r)$, $m=1,2$. На поверхнях розімкнутих електродів сенсора ($m=2$) електростатичну індукцію наближено вважаємо рівною нулю. Так як п'єзощари мають відносно малу товщину і велику теплопровідність їх матеріалу порівняно з матеріалом пасивного шару, то температуру дисипативного розігріву приймаємо постійною по всій товщині. Рівняння стану поляризованої уздовж координати z п'єзокераміки, які описують моногармонічну осесиметричну деформацію в п'єзоелектричних шарах відносно комплексних амплітудних величин, мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= S_{11}^E \varepsilon_r + S_{12}^E \varepsilon_\theta - b_{31} E_z, \\ \sigma_\theta &= S_{12}^E \varepsilon_r + S_{11}^E \varepsilon_\theta - b_{31} E_z,\end{aligned}\quad (1)$$

$$D_z = b_{31}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + b_{33} E_z, \quad E_z = -\frac{\partial \phi_m}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}S_{11}^E &= \frac{1}{C_{11}^E(1-\nu_E^2)}, \quad \nu_E = -\frac{C_{12}^E}{C_{11}^E}, \\ b_{31} &= \frac{d_{31}}{C_{11}^E(1-\nu_E)}, \quad k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^T(1-\nu_E)}, \\ b_{33} &= \varepsilon_{33}^T(1-k_p^2),\end{aligned}\quad (3)$$

де $C_{kl}^E, d_{kl}, \varepsilon_{kl}^T$ – відповідно комплексні податності, п'єзомодулі та діелектричні проникності в п'єзоелектричних шарах; $\sigma_r = \sigma'_r + i\sigma''_r$, $\sigma_\theta = \sigma'_\theta + i\sigma''_\theta$, $\varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + i\varepsilon''_\theta$ – комплексні амплітуди радіальних і колових напружень та аналогічних деформацій в шарах. Тут використовуємо стандартні позначення комплексних величин: $a = a' + ia''$, $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$. Для ізотропного пасивного матеріалу внутрішнього шару пластини справджуються співвідношення (1), у яких коефіцієнти S_{11}^E , S_{12}^E і b_{31} необхідно замінити відповідно на:

$$S_{11} = E/(1-\nu^2), \quad S_{12} = \nu S_{11}, \quad b_{31} = 0, \quad (4)$$

де $E = E' + iE''$ – залежний від температури модуль в'язкопружності; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона, який вважаємо постійною і дійсною величиною.

Амплітудні параметри деформацій у співвідношеннях (1), (2) через комплексні амплітуди радіальних переміщень u і прогинів w серединної площини пластини виражаються такими залежностями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= e_r + z\kappa_r, \quad \varepsilon_\theta = e_\theta + z\kappa_\theta, \\ e_r &= \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \quad \kappa_r = \frac{d\theta}{dr}, \quad \kappa_\theta = \frac{\theta}{r}, \quad \theta = -\frac{dw}{dr}.\end{aligned}\quad (5)$$

Враховуючи електричні граничні умови для актуатора та сенсора, електростатичні співвідношення (2) мають вигляд:

$$D_{z1} = -b_{33}^1 \frac{V_A}{h_1} + b_{31}^1 \left(e + \frac{h_1 + h_3}{2} \kappa \right), \quad e = e_r + e_\theta,$$

$$E_{z1} = -\frac{V_A}{h_1} - \frac{b_{31}^1}{b_{33}^1} \left(z + \frac{h_1 + h_3}{2} \right) \kappa, \quad (6)$$

$$-\frac{h_3}{2} - h_1 \leq z \leq -\frac{h_3}{2}, \quad \kappa = \kappa_r + \kappa_\theta,$$

$$E_{z2} = -\frac{b_{31}}{b_{33}}(e + z\kappa), \quad \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2}.$$

Рівняння осесиметричних гармонічних згинних коливань круглої пластини мають вигляд:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \tilde{\rho}\omega^2 u = 0,$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - Q_r = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r}Q_r + \tilde{\rho}\omega^2 w + P(r) = 0,$$

де N_r, N_θ і M_r, M_θ - комплексні амплітуди радіальних та колових зусиль і моментів відповідно, $\tilde{\rho} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$, $\rho_{1,2,3}$ - питомі густини матеріалів п'єзошарів та пасивного шару, $P(r)$ - зовнішнє навантаження. Через гістерезисні втрати у матеріалі вимушені коливання тонкостінних елементів із в'язкопружних матеріалів супроводжуються дисипативним розігрівом. Тому співвідношення електромеханіки (5) - (7) необхідно доповнити усередненим за цикл коливань і уздовж товщини пластини рівнянням енергії, яке описує осесиметричний розподіл температури вібророзігріву:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\alpha_s}{\lambda h} (T - T_s) + \frac{1}{\lambda h} \tilde{W}, \quad (8)$$

$$\text{де } h = h_1 + h_2 + h_3; \quad \alpha_s = (\alpha_1 + \alpha_2)/2;$$

α_1, α_2 - коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = -(h_3/2 + h_1)$ і $z = (h_3/2 + h_2)$ відповідно; λ - усереднений коефіцієнт теплопровідності; a - коефіцієнт температуропровідності; T_s - температура зовнішнього середовища; $\tilde{W}$ - дисипативна функція [1] для в'язкопружної пластини із зовнішніми п'єзоелектричними сенсором та актуатором, формула для якої не наводиться через громіздкість. Дану задачу електротермомеханіки про резонансні згинні коливання і вібророзігрів круглої пластини необхідно доповнити граничними і початковими

умовами. Так як для круглої суцільної пластини центральна точка є особливою, то при чисельному розв'язанні задачі розглядаємо пластину з достатньо малим отвором радіуса δ , на контурі якого приймаємо умови регулярності та симетрії для рівнянь електромеханіки і теплопровідності, так що:

$$N_r = 0, \quad Q_r = 0, \quad \theta = 0, \quad r = \delta, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = \delta. \quad (9)$$

На зовнішньому радіальному торці пластини виконуються умови шарнірного закріплення:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0, \quad r = R. \quad (10)$$

Гранична умова на радіальному торці та початкова умова для рівняння теплопровідності мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\alpha_r}{\lambda} (T - T_s), \quad r = R, \quad T = T_0, \quad t = 0. \quad (11)$$

Алгоритм розв'язання задачі

Якщо в'язкопружні властивості матеріалів залежать від температури, то для розв'язання нелінійної системи рівнянь (5) - (11) можна застосувати метод покрокового інтегрування [2] за часом. Для цього рівняння електромеханіки (5) - (7) після деяких перетворень записуємо у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального виду:

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{1}{r}(B_{13} - 1)N_r + \frac{B_{14}}{r}M_r + \left(\frac{B_{11}}{r^2} - \tilde{\rho}\omega^2\right)u + \\ + \frac{B_{12}}{r^2}\theta + \frac{1}{r}N_E, \quad \frac{dQ_r}{dr} = -\frac{1}{r}Q_r - \tilde{\rho}\omega^2 w - P(r),$$

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{B_{23}}{r}N_r + \frac{1}{r}(B_{24} - 1)M_r + \frac{B_{21}}{r^2}u + \frac{B_{22}}{r^2}\theta + \frac{1}{r}M_E$$

$$\frac{du}{dr} = A_{13}N_r + A_{14}M_r + \frac{A_{11}}{r}u + \frac{A_{12}}{r}\theta + F_1, \quad (12)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\theta, \quad \frac{d\theta}{dr} = A_{23}N_r + A_{24}M_r + \frac{A_{21}}{r}u + \frac{A_{22}}{r}\theta + F_2.$$

Рівняння електромеханіки (12) є комплекснозначними з граничними умовами (9), (10). З використанням програми для розв'язування звичайних

диференціальних рівнянь [1], (12) на кожному часовому кроці інтегруються чисельним методом дискретної ортогоналізації. Після обчислення дисипативної функції $\tilde{W}$ задача теплопровідності (8), (9), (10) розв'язується методом скінченних різниць із застосуванням явної схеми. Для демпфірування вимушених коливань пластини за допомогою сенсорів та актуаторів необхідно за величиною амплітуди різниці електричних потенціалів V_S на електродах сенсора, зумовленої зовнішнім тиском P , визначити величину потенціалу V_A , яку необхідно підвести до электродів актуатора, щоб компенсувати навантаження:

$$V_A = G_S V_S, \quad (13)$$

тут G_S - коефіцієнт оберненого зв'язку. Враховуючи те, що у пластині реалізуються переважно згинні коливання, а максимальні прогини досягаються на резонансній частоті найбільш енергоємної першої моди, то всі розрахунки в залежності від величини радіуса r_0 п'єзошарів проводились на частотах першого резонансу.

На Рис.1 наведено залежності від безрозмірного радіуса $x_0 = (r_0 - \delta)/L$ п'єзошарів, які виконують роль сенсора і актуатора, розподілів першої резонансної частоти згинних коливань пластини $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ (штрих-пунктирні криві), розрахованих на цих частотах максимальних амплітуд прогинів $w_E = |w_E^1(x=0)| \cdot 10^5 \text{ м}$ при підведенні до актуатора електричного потенціалу $V_A' = 1 \text{ В}$, $V_A'' = 0$, $P = 0$ і $w_p = |w_p^1(x=0)| \cdot 10^6 \text{ м}$ при механічному навантаженні з амплітудою $P = 1 \text{ Па}$ $V_A' = V_A'' = 0$ (штрихові лінії). Суцільна крива $\tilde{G}_{as}$ характеризує залежність від параметра x_0 коефіцієнта керування $\tilde{G}_{as} = G_S \cdot 10^{-1}$ у співвідношенні оберненого зв'язку. Аналіз кривих w_p показує, що максимальні амплітуди прогинів пластини при

механічному навантаженні слабо залежать від параметра x_0 , що характеризує площу п'єзошарів.

За винятком достатньо малого околу точки $x_0 = 0$, показники сенсора V_S^1 мало змінюються зі збільшенням параметра x_0 . При цьому w_E досягає максимального, а V_A^1 - мінімального значень при повному покритті п'єзошарами зовнішніх площин пластини ($x_0 = 1$). Розміри актуатора і сенсора є найбільш оптимальними з параметром $0.7 \leq x_0 \leq 1$.

Рис. 1

При таких розмірах п'єзоактивних складових підведена до актуатора різниця електричних потенціалів V_A викликає максимальні прогини w_E пластини, а коефіцієнт оберненого зв'язку буде мінімальним (крива $\tilde{G}_{as}$). Бачимо, що у випадку шарнірного закріплення пластини коефіцієнт $\tilde{G}_{as} \approx 1$.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖТТУ, 2005. - 428 с.
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - Киев: Наукова думка, 1986. - 222 с.

References

1. KARNAUKHOV, V. G., MIKHAILENKO, V. V. (2005). *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmonicheskom nagruzhenii*. Zhitomir: ZHTTU.
2. KARNAUKHOV, V. G., KIRICHOK, I.F. (1986). *Svyazannye zadachi teorii vyazkouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 23.12.18