УДК 539.376

Голуб В. П., д.т.н, проф.

V. P. Golub, D. Sci. prof.

**Щодо розв'язку задач повзучості
тонкостінних трубчастих елементів із
ізотропних нелінійно-в'язкопружних
матеріалів**

**Towards the solution of creep problems of
thin-shelled tubular elements in isotropic
nonlinear viscoelastic materials**

Національна академія наук України, Інститут
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,
вул. Несторова, 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Ukraine, S.P.Timoshenko
Institute of Mechanics, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Запропоновано підхід щодо розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом та скрученням. У якості визначальних рівнянь повзучості обрано систему рівнянь, що побудована згідно із гіпотезою пропорційності девіаторів, нелінійність в'язкопружних властивостей в якій задається відносно інтенсивності деформацій повзучості та деформацій об'ємної повзучості моделями типу моделі Работнова. Ядра інтенсивності деформацій повзучості та об'ємної повзучості задаються співвідношеннями, що встановлюють залежність між цими ядрами та ядрами одновимірної повзучості із системи базових експериментів. У якості базових експериментів розглянуто одновісний розтяг із виміром повздовжніх та поперечних деформацій, а також одновісний розтяг та чисте кручення із виміром повздовжніх та зсувних деформацій. Функції нелінійності в'язкопружних властивостей задаються згладжуючими кубічними сплайнами. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повздовжньої, поперечної та зсувної повзучості тонкостінних трубчастих зразків із «поліетилену високої щільності ПЕВП».

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, двовісний напружений стан, процес повзучості.

A new approach to the creep strains analysis of thin-shelled tubular elements in isotropic nonlinear viscoelastic materials under combined loading with uniaxial tension and torsion has been proposed. The system of equations that is constructed according to the deviators proportionality hypothesis has been chosen as the creep constitutive equations the nonlinearity of viscoelastic properties in which is given with respect to the creep strain intensity and volumetric strain by the Rabotnov type models. The kernels of creep strain intensity and volumetric strain are given by the relations that establish the relationships between these kernels and one-dimensional creep kernels determined from a system of base experiments. One-dimensional tension with the measurement of longitudinal and transverse strains as well as one-dimensional tension and pure torsion with the measurement of longitudinal and shearing strains have been considered as base experiments. The functions of nonlinearity of viscoelastic properties are given by smoothing cubic splines. The problems of the analysis of longitudinal, transverse and shearing strains of thin-shelled tubular specimens made of "high density polyethylene PEHD" have been solved and experimentally approved.

Key Words: nonlinear viscoelasticity, biaxial stress state, creep process.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Широке застосування полімерів та композитів на їх основі у відповідальних елементах сучасних інженерних конструкцій стимулювало розвиток та активне використання лінійної та нелінійних теорій в'язкопружності при визначенні напружено-деформованого стану таких конструкцій та їх довговічності.

Однією із основних задач, що розв'язується у разі використання теорій в'язкопружності, розглядаються задача ідентифікації ядер спадковості за умов складного напруженого стану та задача визначення параметрів ядер спадковості. В лінійній теорії в'язкопружності задача ідентифікації ядер спадковості та визначення параметрів ядер за умов складного

напруженого стану розв'язується на підставі співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами спадковості за умов складного та одновісного напруженого станів [1-3]. В цій роботі такий підхід до розв'язання задачі ідентифікації ядер спадковості за умов складного напруженого стану узагальнено на один із варіантів нелінійної теорії в'язкопружності.

1. Постановка задачі

Розглядається процес повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов двовісного напруженого стану і простих режимів навантаження.

Вважається, що за умови простих режимів навантаження справедливими є гіпотеза пропорційності девіаторів та гіпотеза єдиної діаграми деформування, так що залежність між компонентами тензорів деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$, тензорів напружень $\sigma_{ij}(t)$ та часом t задається системою визначальних рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \quad (i, j=1, 3) \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

Тут $\varepsilon_v(t)$, $\varepsilon_i(t)$ – об'ємна деформація та інтенсивність деформацій повзучості; $\sigma_0(t)$ та $\sigma_i(t)$ – середнє напруження та інтенсивність напружень; $K_v(t)$ та $K_i(t)$ – ядра об'ємної повзучості та інтенсивності деформацій повзучості; $\varphi_v(\cdot)$ та $\varphi_i(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей; δ_{ij} – дельта-функція Кронекера.

Ядра повзучості в (1.1) задаються дробово-експоненціальними функціями, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (1.2)$$

де α , β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

2. Ідентифікація ядер повзучості

Задача ідентифікації ядер повзучості $K_i(t-\tau)$ та $K_v(t-\tau)$ в (1.1) розв'язується шляхом встановлення залежностей між ядрами повзучості за умов складного та одновісного напруженого стану, що розглядається як базовий. Розглянуто дві групи одновимірних базових експериментів, що містять випробування зразків матеріалу на повзучість за умов одновісного розтягу, а також за умов одновісного розтягу та чистого скручення.

2.1. Базовий експеримент: одновісний розтяг. Експеримент містить випробування суцільних циліндричних зразків матеріалу на повзучість під дією одновісного розтягуючого напруження σ_{11} із вимірюванням повздовжніх $\varepsilon_{11}(t)$ та поперечних $\varepsilon_{22}(t)$ деформацій.

Залежність між деформаціями, напруженням та часом задається рівняннями

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \varphi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) &= - \left[\sigma_{11}(t) + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $K_{11}(t-\tau)$, $K_{22}(t-\tau)$ – ядра повздовжньої та поперечної повзучості; $\varphi_{11}(\cdot)$, $\varphi_{22}(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей у повздовжньому та поперечному напрямках.

Із сумісного розв'язку рівнянь (1.1) та (2.1) для ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \lambda_i K_i(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) + \psi_{22}(\sigma_{11})}, \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2\psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного та одновісного напруженого станів.

2.2. Базовий експеримент: одновісний розтяг та чисте скручення. Експеримент містить випробування на повзучість суцільних циліндричних зразків за умов одновісного розтягу напруженнями σ_{11} із вимірюванням повздовжніх деформацій $\varepsilon_{11}(t)$ та тонкостінних трубчастих

зразків за умов чистого скручення напруженнями τ_{21} із вимірюванням зсувних деформацій $\varepsilon_{21}(t)$.

Залежність між деформаціями, напруженнями та часом задається рівняннями

$$\begin{aligned}\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \varphi_{21}(\varepsilon_{21}(t)) &= \tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (2.3)$$

де $K_{11}(t-\tau)$, $K_{21}(t-\tau)$ – ядра повздовжньої та зсувної повзучості; $\varphi_{11}(\cdot)$, $\varphi_{21}(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність повздовжніх та зсувних в'язкопружних властивостей.

Із сумісного розв'язку рівнянь (1.1) та (2.3) для ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}\lambda_i K_i(t) &= \lambda_{21} K_{21}(t); \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) \psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{21} K_{21}(t) \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)},\end{aligned}\quad (2.4)$$

що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного та одновимірного напруженого станів.

2.3. Функції нелінійності в'язкопружних властивостей. Нелінійність в'язкопружних

властивостей у рівняннях (2.1) і (2.3) та у співвідношеннях (2.2) і (2.4) задається функціями $\psi(\cdot)$ у формі згладжуючих кубічних сплайнів, так що

$$\psi(\cdot) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3, \quad (2.5)$$

де $a_{0,j}; \dots$ – коефіцієнти сплайнів; j – кількість інтервалів розбиття діаграми миттєвого деформування, нелінійність якої визначає нелінійність в'язкопружних властивостей матеріалу.

3. Повзучість тонкостінних трубчастих елементів

Розв'язується задача розрахунку деформацій повздовжньої, поперечної, зсувної та об'ємної повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену високої щільності ПЭВП” за умов одновісного та двовісного навантаження.

На фіг. 1, якості приклад, наведені результати розрахунків деформацій повздовжньої та зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену ПЭВП” за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом та скрученням порівняно із експериментальними даними. Штриховими лініями нанесено розрахунки, що виповнені із використанням параметрів ядер повзучості, що знайдені згідно із співвідношенням (2.2), штрихпунктирними лініями – згідно із співвідношенням (2.4). Експериментальні дані запозичені із [4].

Фіг. 1 Розрахункові (лінії) та експериментальні (кола) значення деформацій повздовжньої (а) та зсувної (б) повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену ПЭВП” за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом із скрученням: $\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ (○); 3,54; 1,66 (◐); 5,31; 2,49 (◑); 7,08; 3,32 (●) МПа

Висновки

Підхід до розв'язку задач повзучості, що ґрунтується на моделі в'язкопружності у формі пропорційності девиаторів та на методі визначення параметрів ядер повзучості на основі співвідношень між ядрами повзучості за умов складного та

одновимірного напружених станів, дозволяє отримувати розв'язки задач розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів під дією нормальних та дотичних напружень, що узгоджуються із експериментальними даними.

Список використаних джерел

1. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) / А.А.Колтунов // Механіка полимеров. – 1969. – №4. – С. 754-758.
2. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 2. – С. 78-90.
3. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 2. Случай пропорциональности девиаторов / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 6. – С. 111-125.
4. Креггерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф.Креггерс, М.Р.Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

References

1. KOLTUNOV, A. (1969) Metod opredelenija objemnyh i sdvigovyh harakteristik uprugovjazkih nasledstvennyh sred po experimentam na jednoosnoe rastjazhenie (szhatie). *Mehanika polimerov*. 4. pp. 754-758.
2. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikacija jader nasledstvennosti izotropnyh linejno-vjazkouprugih materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii. 1. Superpozicija sdvigovoj i objemnoj polzuchesti. *Prikl. Mehanika*. 52 (2). pp. 78-90.
3. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikacija jader nasledstvennosti izotropnyh linejno-vjazkouprugih materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii. 2. Sluchaj proporcional'nosti deviatorov. *Prikl. Mehanika*. 52 (6). pp. 111-125.
4. KREGERS, A.F., KILEVICH, M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vysokoj plotnosti v uslovijah nelinejnoj polzuchesti i relaksacii naprjazhenij. *Mechanika kompozitnyh materialov*. 2. pp. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 19.06.2019