УДК 539.3:539.219:67.03

Калиняк Б.М., к.ф.-м.н., с.н.с.

**Про деякі способи досягнення
відсутності термонапружень у
неоднорідному за товщиною безмежному
шарі при стаціонарному тепловому
навантаженні**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова 3Б,
e-mail: b-kalynyak@litech.net

B. M. Kalynyak, PhD

**On some ways to achieve the absence of
thermal stresses in an inhomogeneous through
thickness infinite layer under stationary
thermal loading**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics of the National Academy
of Sciences of Ukraine, 79060, L'viv, Naukova str.,
3B,
e-mail: b-kalynyak@litech.net

Запропоновано метод визначення характеристик функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) для забезпечення нульових термонапружень у нескінченному шарі при заданих сталих теплових навантаженнях. Вважаємо, що на поверхнях шару задані класичні умови теплообміну, температурне поле стаціонарне, характеристики ФГМ описуються моделлю простої суміші, характеристики термонапруженого стану і матеріалу залежать тільки від поперечної змінної. Отримано точні аналітичні вирази для розподілу концентрації одного з матеріалів по товщині шару при відсутності масових сил та теплових джерел, яка забезпечує нульові поздовжні напруження.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, термомеханічні характеристики, шар, модель простої суміші, відсутність напружень, стаціонарне температурне поле, композити.

A method for determining the characteristics of functional gradient materials (FGM) for providing zero thermal stresses in an infinite layer with given constant thermal loads is proposed. We assume that the classical convective conditions of heat transfer are given on the surfaces of the layer, the temperature field is stationary, the characteristics of the FGM are described by the model of a simple mixture, the characteristics of the thermo-stressed state and the material depend only on the transverse variable. Precise analytical expressions were obtained for the distribution of the concentration of one of the materials on the thickness of the layer in the absence of mass forces and heat sources, which provides zero longitudinal stresses.

Key words: functional-gradient materials, thermomechanical characteristics, layer, model of a simple mixture, absence of stresses, stationary temperature field, composites.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Сучасні технології дозволяють виготовляти матеріали з заданими розподілами їх характеристик для продовження терміну експлуатації виробів при теплових та силових навантаженнях. Це, зокрема, композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ)[1–3].

Актуальною задачею стає підбір таких характеристик ФГМ, який би забезпечував відсутність переміщень чи напружень при заданих теплових і, можливо, силових навантаженнях.

У цій праці отримано зв'язок між стаціонарним температурним полем та характеристиками ФГМ у нескінченному неоднорідному по товщині шарі при заданих теплових навантаженнях на його поверхнях, який забезпечує нульові поздовжні та поперечні напруження.

Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо нескінченний неоднорідний по товщині h вздовж осі Oz шар, на який діють

силові та стаціонарні теплові навантаження, викликані внутрішніми тепловими джерелами $Q(z)$ та конвективним теплообміном з середовищами з температурою T_1 на нижньому шарі з координатою $z=0$ і T_2 – на верхньому шарі з координатою $z=h$ відповідно. Вважатимемо, що у перерізі відсутні згинні моменти, а деформації $e_{xx} = e_{yy} = e = \text{const}$ вздовж осей Ox та Oy – сталі. Характеристики матеріалу: модуль пружності E , коефіцієнт лінійного теплового розширення α , коефіцієнт теплопровідності λ , коефіцієнт Пуассона ν , і стаціонарне температурне поле T вважаємо функціями координати z . Потрібно встановити умови відсутності термонапружень у такому шарі і використати їх для визначення характеристик матеріалів. Подібна задача для порожнистого циліндра розглянута в роботі [4].

Вираз для поздовжніх напружень та деформацій у неоднорідному шарі, коли наявні силові та температурні навантаження в неоднорідному шарі можна записати при відсутності силових навантажень [5]:

$$\sigma = -\frac{E}{1-\nu} \Phi(T(z)) + e \frac{E}{1-\nu}, \quad (1)$$

$$e = \frac{-\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \Phi(T(\xi)) d\xi}{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} d\xi}, \quad (2)$$

де $\Phi(T(z))$ – може описувати вклад довільного зовнішнього поля, зокрема температурного. У цьому випадку $\Phi(T(z)) = \alpha(T(z) - T_0)$, де T_0 – відлікова температура, при якій відсутні напруження. Напруження у поперечному напрямі будуть відсутніми, якщо нема поперечних силових навантажень. Відповідне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду для визначення умов відсутності термонапружень отримаємо з виразів (1), (2), якщо напруження і всі силові навантаження дорівнюють нулеві

$$\Phi(T(z)) - \frac{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \Phi(T(\xi)) d\xi}{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} d\xi} = 0. \quad (3)$$

Його розв'язком як рівняння з виродженим ядром, що має власні значення є:

$$\Phi(T(z)) = D, \quad (4)$$

де D – довільна стала. З виразу (4) отримано вираз для температурного поля,

$$t(z) = \frac{D}{\alpha(z)}, \quad t(z) = T(z) - T_0, \quad (5)$$

яке повинно бути розв'язком відповідної стаціонарної задачі теплопровідності (взято випадок умов конвективного теплообміну):

$$\frac{d}{dx}(\lambda(z) \frac{dt}{dz}) = -Q(z), \quad (6)$$

$$\lambda(0) \frac{dt(0)}{dx} + \beta_1 t_1 = 0, \quad \lambda(h) \frac{dt(h)}{dx} + \beta_2 t_2 = 0, \quad (7)$$

де $t_1 = T(0) - T_1$, де $t_2 = T(h) - T_2$, T_1 , T_2 – температури оточуючих середовищ, $Q(z)$ – інтенсивність теплових джерел. Отже з виразів (5) – (7) слідує, що розв'язок (5), який має одну довільну сталу повинен задовольняти диференціальне рівняння (6) і дві умови (7).

Умови на межах (7) накладають зв'язки між температурами середовищ, коефіцієнтами теплообміну з середовищем, значеннями коефіцієнта лінійного теплового розширення на межах, а диференціальне рівняння (7) – між інтенсивностями теплових джерел, коефіцієнтом лінійного теплового розширення та коефіцієнтом теплопровідності. Ці зв'язки, отримані після підставлення виразу (5) у рівняння (6) та умови (7) мають вигляд

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha(h) \left[\beta_1 - \lambda(0) \frac{1}{\alpha(0)} \frac{d\alpha(0)}{dx} \right] \beta_2}{\alpha(0) \left[\beta_2 - \lambda(h) \frac{1}{\alpha(h)} \frac{d\alpha(h)}{dx} \right] \beta_1}, \quad (8)$$

$$\lambda(z) = \frac{\alpha^2(z) \left(\int_0^z Q(\xi) d\xi + C \right)}{D \frac{d\alpha(z)}{dz}}, \quad (9)$$

$$\alpha(z) = \frac{D}{-\int_0^z \ln\left(\frac{\lambda(\xi)}{\lambda(\zeta)}\right) Q(\xi) d\xi + \int_0^z \frac{C_1}{\lambda(\xi)} d\xi + C_2},$$

де C , C_1 , C_2 – довільні сталі.

Рівняння (6) можна трактувати як вираз інтенсивності теплових джерел через коефіцієнт лінійного теплового розширення та коефіцієнт теплопровідності. Тому найпростішим теоретичним способом отримання відсутності напружень є створення об'ємних теплових джерел, отриманих з рівняння (6) після підставлення в

нього характеристик матеріалів з врахуванням обмежень на умови теплообміну (8). Однак технологічно легше реалізувати випадок, коли теплові джерела відсутні. Це значить, як слідує з рівняння (6), що крім умов теплообміну потрібно узгодити також механічні та теплові характеристики матеріалів.

Характеристики матеріалів, які призводять до відсутності термонапружень

Тому розглянемо випадок, який цікавий для практики і його порівняно можливо реалізувати: це випадок відсутності об'ємних теплових джерел $Q(z) = 0$ у двокомпонентних матеріалах, характеристики яких описуються моделлю простої суміші [6]

$$P(z) = P_2 + P_1 (1 - V(z)), \quad (10)$$

де $V(z)$ ($V(z) \in [0,1]$) – концентрація другого матеріалу в першому, P_1 , P_2 – термомеханічні характеристики відповідно 1-го та 2-го матеріалів відповідно. Виявляється, що у цьому випадку нелінійне диференціальне рівняння (9) відносно концентрації $V(z)$ має точний розв'язок, який виражається через функції Лямберта [7]

$$V(z) = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_2 W_L(Z(z))(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2)W_L(Z(z))}, \quad (11)$$

де

$$Z(z) = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1) \exp\left(-\frac{BD(\alpha_1 - \alpha_2)^2(z + C_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (12)$$

З формули (11) можна визначити сталі B та C_1 , якщо відомі концентрації у двох точках, наприклад $V_1 = V(0)$, та $V_2 = V(h)$, які відповідають значенням $\alpha(0)$ та $\alpha(h)$ відповідно при вибраних характеристиках складових суміші. Отримаємо два трансцендентні рівняння:

$$V_i = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z_i)},$$

$$z_1 = Z(0), \quad z_2 = Z(h), \quad i = 1, 2, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 1. \quad (13)$$

Ці рівняння мають точні розв'язки відносно z_1 і z_2

$$z_i = D_i \exp(D_i), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$\text{де } D_1 = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad D_2 = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

З виразу (12) при значеннях $z = z_1$ і $z = z_2$ та (14) отримана система двох алгебричних рівнянь для визначення сталих BD та C_1 , розв'язком якої є

$$C_1 = \frac{\alpha_1 h [\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \alpha_2 - (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)]}{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$BD = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{h \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2}. \quad (16)$$

Якщо розв'язків рівняння (11) при значеннях V_1 та V_2 лівої частини не існує, то це значить, що вибрали не ті матеріали або при заданих умовах теплообміну не можна забезпечити відсутності напружень у шарі. Сталу D визначено з однієї з умов (7) після визначення концентрації $V(z)$, підставленням сталих (16) у вираз (11) і врахуванням того що [7] $W'(z) = W(z) / [z(1 + W(z))]$, коли $z \neq 0$ і $W'(0) = 1$ у границі.

Результати обчислень

ФГМ з характеристиками складових (алюміній і циркон [8]) $\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_1 = 204 \text{ Вт/(м·К)}$, $\lambda_2 = 2,09 \text{ Вт/(м·К)}$ для забезпечення у шарі товщиною 0,1 м нульових напружень підбирався для температури середовища $t_1 = 200 \text{ К}$, відлікової температури $T_0 = 300 \text{ К}$, коефіцієнтів теплообміну $\beta_1 = 40000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ і $\beta_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. В результаті обчислень отримана температура другого оточуючого середовища $t_2 = 1783,1 \text{ К}$.

Рис.1. Залежності від поперечної координати температури, концентрації та характеристик ФГМ, які забезпечують нульові радіальні напруження

При цих значеннях характеристик складових і температур на поверхні $D = 0,003164494463$.

Висновки

У праці :

- отримано точний аналітичний вираз для температурного поля через характеристики матеріалу при відсутності силових навантажень, який є умовою відсутності термонапружень у шарі та повинен бути розв'язком стаціонарної задачі теплопровідності;
- отримано умови узгодження параметрів конвективного теплообміну і характеристик матеріалів, необхідних для відсутності термонапружень.

Список використаних джерел

1. Abrinia K. New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading / [K. Abrinia, H. Naee, F. Sadeghi, F. Djavanroodi] // American Journal of Applied Sciences. – 2008. – Vol. 5, № 7. – P. 852–859.
2. Bohidar S. K. Functionally graded materials: a critical review / S. K. Bohidar, R. Sharma, P. R. Mishra // International Journal of Research. – 2014. – Vol. 1, № 7. – P. 289–301.
3. Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts [ed. by Kiyoshi Ichikawa]. – 2001. – Vol. XVI. – 242 p.
4. Kalynyak B. M. Guaranteeing the Absence of Radial Stresses in a Long Hollow Cylinder by the Inhomogeneity of Material /B. M. Kalynyak// Materials Science.– 2016. – Vol. 52, № 2.– P. 261–268.
5. Кушнір Р.М., Попович В.С. Термопружність термочутливих тіл : Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл : в 4-х т. / під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Львів : СПОЛОМ, 2009. – Т. 3. – 409 с.
6. Shen H.-S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells / H.-S. Shen. – CRC Press, 2009. – 280 p.
7. Uysal M. U. Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates. *World Academy of Scienc. Engineering and Technology. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2013. Vol:7, No:11. pp. 2283–2289.
8. On the Lambert W function / [Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. et al.] // Adv. Comp. Math. – 1996. – Vol 5. – P. 329–359

• у випадку ФГМ, характеристики якого описуються моделлю простої суміші, отримано точні аналітичні вирази для концентрації складових, яка забезпечує нульові напруження;

- адекватність підходу підтверджена обчисленням значень концентрацій складових у реально існуючому ФГМ, які повинні забезпечити відсутність нескінченному неоднорідному шарі;
- при довільних заданих характеристиках матеріалу відсутність напружень можна забезпечити тепловими джерелами, інтенсивність яких визначається з рівняння теплопровідності (6).

References

1. ABRINIA, K. et al. (2008) New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading. *Am. J. Appl. Sci.* 5 (7). p. 852–859.
2. BOHIDAR, S. K., SHARMA, R. & MISHRA, P. R. (2014) Functionally graded materials: a critical review. *Int. J. Res.* 1 (7). p. 289–301.
3. (ed. ICHIKAWA, KIYOSHI) (2001) *Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts*. XVI.
4. KALYNYAK, B. M. (2016) Guaranteeing the Absence of Radial Stresses in a Long Hollow Cylinder by the Inhomogeneity of Material. *Materials Science*. 52(2).p.261–268.
5. KUSHNIR R.M., POPOVYCH V.S. (2009) *Termoprzhnist termochutlyvykh til V.3 in Modeluvannya ta optymizaciya v termomechanizi elektroprovodnykh til: v 4-ch tomach / pid zah red. Ya. Y. Buraka, R.M. Kushnira. Spolom, L'viv*.
6. SHEN, H.-S. (2009) *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press.
7. CORLESS, R et al. (1996) On the Lambert W function. *Adv. Comp. Math.* 5. p. 329–359.
8. UYSAL M. U. (2013) Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates. *World Academy of Scienc. Engineering and Technology. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 7(11). p. 2283–2289.

Надійшла до редколегії 19.06.2019