УДК 512.53

В.М. Журавльов¹, к.ф.-м.н., доцент
І.М. Циганівська², к.ф.-м.н., асистент

Проективні ґратки черепичних порядків.

^{1,2}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua
iratsy80@gmail.com

V.M. Zhuravlev¹, Ph.D., Associate Professor
I.M. Tsyganivska², Ph.D., Associate Professor

Projective lattices of tiled orders.

^{1,2}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua
iratsy80@gmail.com

У роботі вивчаються проективні ґратки черепичних порядків. Описано умови, яким задовольняють елементи матриці показників черепичного порядку, за яких перетин проективних ґраток є проективною ґраткою.

Ключові слова: черепичний порядок, матриця показників, проективна ґратка.

Tiled orders over discrete valuation ring have been studied since the 1970s by many mathematicians, in particular, by Yategaonkar V.A., Tarsy R.B., Roggenkamp K.W, Simson D., Drozd Y.A., Zavadsky A.G. and Kirichenko V.V. Yategaonkar V.A. proved that for every $n \geq 2$, there is, up to an isomorphism, a finite number of tiled orders over a discrete valuation ring $\mathcal{O}$ of finite global dimension which lie in $M_n(K)$ where K is a field of fractions of a commutatively discrete valuation ring $\mathcal{O}$. The articles by R.B. Tarsy, V.A. Yategaonkar, H. Fujita, W. Rump and others are devoted to the study of the global dimension of tiled orders. H. Fujita described the reduced tiled orders in $M_n(D)$ of finite global dimension for $n = 4, 5$. V.M. Zhuravlev and D.V. Zhuravlev described reduced tiled orders in $M_n(D)$ of finite global dimension for $n = 6$. This paper examines the necessary condition for the finiteness of the global dimension of the tile order. Let A be a tiled order. The kernel of the projective resolvent of an irreducible lattice has the form $M_1 f_1 + M_2 f_2 + \dots + M_s f_s$, where M_i is irreducible lattice, f_i is some vector. If the tile order has a finite global dimension, then there is a projective lattice that is the intersection of projective lattices. This condition is the one explored in the paper.

Key words: tiled order, exponent matrix, projective lattice.

Communicated by Prof. Petravchuk A. P.

1 Вступ

Черепичні порядки (tiled orders) над дискретно нормованими кільцями вивчалися, починаючи з 70-х років минулого сторіччя, багатьма математиками, зокрема, Ятегаонкаром В.А., Тарсі Р.Б., Рогенкампом К.В., Сімсоном Д., Дроздом Ю.А., Завадським О.Г. та Кириченком В.В. Скінченні прямі добутки A таких порядків є нетеровими справа напівпервинними напівдосконалими напівдистрибутивними кільцями, у яких для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим (не обов'язково комутативним) [1]. Такі кільця під назвою "напівмаксимальні кільця" були введені у 1974 році Завадським О.Г. та Кириченком В.В.

Згідно термінології Р.Б. Тарсі [4] та В.А. Ятегаонкара [5], кільце $A \subset M_n(K)$, де K є по-

лем часток комутативного дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$, називається черепичним порядком над $\mathcal{O}$, якщо $M_n(K)$ — класичне кільце часток A , $e_{ii} \in A$ та $e_{ii} A e_{ii} = \mathcal{O}$ для $i = 1, \dots, n$, де e_{ii} — матричні ідемпотенти $M_n(K)$. Отже, означення черепичного порядку як первинного нетерового напівдосконалого напівдистрибутивного кільця є узагальненням поняття черепичного порядку над дискретно нормованим кільцем в розумінні Р.Б. Тарсі та В.А. Ятегаонкара.

В.А. Ятегаонкара у [5] довів, що для кожного $n \geq 2$ існує, з точністю до ізоморфізму, скінченне число черепичних порядків над дискретно номованим кільцем $\mathcal{O}$ скінченної глобальної розмірності, які лежать у $M_n(K)$, де K є полем часток комутативного дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$. В якості кільця $\mathcal{O}$ часто розглядає-

ться кільце $k[[x]]$ формальних степеневих рядів над полем k від однієї змінної x .

Вивченню глобальної розмірності черепичних порядків присвячені багаточисельні статті. Р.Б. Тарсі висловив гіпотезу, що максимальною скінченною глобальною розмірністю черепичного порядку, який лежить у $M_n(K)$, є число $n-1$. Це дійсно має місце для але для Х. Фуджита побудував приклад черепичного порядку A , який лежить у $M_6(K)$, та $gl.dim A = 6$.

Фуджита в [6] описав зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 4, 5$. В.М. Журавльов та Д.В. Журавльов описали зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 6$.

У даній роботі розглядається необхідна умова для скінченності глобальної розмірності черепичного порядку. Відмітимо, що в нашій термінології "черепичний порядок" — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. Всі необхідні відомості про черепичні порядки можна знайти в [1], [2].

2 Черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями

Означення 2.1. Кільце A називається **напівмаксимальним**, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [3].

Теорема 2.1. (див. [3]) *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix} \quad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця Λ , т.б. $\Lambda = \sum_{i,j=1}^n e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є *зведеним*, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Кільце $\mathcal{O}$ вкладається в класичне тіло часток $\mathcal{D}$, і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$, де $e_{11}, \dots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця Λ .

Означення 2.2. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A -граткою називається правий (лівий) A -модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$ -модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A -модулі є A -гратками.

Серед всіх A -граток виділяються так звані незвідні A -гратки, тобто A -гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q -модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [3] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A -гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A -модулем з $\mathcal{O}$ -базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}$$

де буква T означає операцію транспонування. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

3 Проективні гратки

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений черепичний порядок в $M_n(D)$, $P_k = e_{kk}\Lambda$, $k = 1, \dots, n$. $P_1, \dots, P_n$ — всі попарно неізоморфні нерозкладні проективні Λ -модулі. Ядро проективної резольвенти незвідної Λ -гратки має вигляд $\sum_{t=1}^s M_t f_t$, де M_t — перетин проективних граток, f_t — деякі вектори (див. [7]). Для скінченності проективної розмірності цієї гратки потрібно, щоб хоча б один перетин проективних граток був проективною граткою.

Нехай $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$. Можливі випадки:

- (1) $a + \alpha_{il} > b + \alpha_{jl}$. Тоді $a + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl}$ і $a = c + \alpha_{kl} - \alpha_{il}$;
(2) $b + \alpha_{jp} > a + \alpha_{ip}$. Тоді $b + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp}$ і $b = c + \alpha_{kp} - \alpha_{jp}$;
(3) $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$. Тоді $a = c + \alpha_{kq} - \alpha_{iq}$, $b = c + \alpha_{kq} - \alpha_{jq}$.

Маємо розбиття множини індексів на підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, де $I_1 = \{l, \text{ для яких виконується випадок (1)}\}$, $I_2 = \{p, \text{ для яких виконується випадок (2)}\}$, $I_3 = \{q, \text{ для яких виконується випадок (3)}\}$. Незвідні проективні ґратки $\pi^a P_i$, $\pi^b P_j$ непорівняльні, тому множини I_1 та I_2 непорожні.

Виразимо a і b у кожному випадку через c . Отримаємо $a + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl}$, $a = c + \alpha_{kl} - \alpha_{il}$, $b + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp}$, $b = c + \alpha_{kp} - \alpha_{jp}$. З нерівності $a + \alpha_{il} > b + \alpha_{jl}$ отримуємо

$$\alpha_{kl} > \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jl}. \quad (2)$$

З нерівності $b + \alpha_{jp} > a + \alpha_{ip}$ отримуємо

$$\alpha_{kp} > \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ip}. \quad (3)$$

Рівності $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$ дають

$$\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{iq} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}. \quad (4)$$

Якщо $k \in I_1$, то $0 = \alpha_{kk} > \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jk}$. Отримали суперечність. Якщо $k \in I_2$, то $0 = \alpha_{kk} > \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ik}$. Отримали суперечність. Отже, $k \in I_3$ і $I_3 \neq \emptyset$.

При $q = k$ маємо $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ik} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jk} = \alpha_{kk} = 0$. Звідси

$$\alpha_{ik} + \alpha_{kl} = \alpha_{il}, \quad \alpha_{jk} + \alpha_{kp} = \alpha_{jp}. \quad (5)$$

З (5) випливає, що $i \notin I_1$ і $j \notin I_2$.

Якщо $i \in I_3$, то $\alpha_{kl} - \alpha_{il} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{ji} = \alpha_{ki}$. Враховуючи (5), маємо $-\alpha_{ik} = -\alpha_{jk} + \alpha_{ji} = \alpha_{ki}$. Звідси $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$. Отримали суперечність. Отже, $i \in I_2$. Якщо $j \in I_3$, то $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ij} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} = \alpha_{kj}$. Враховуючи (5), маємо $-\alpha_{ik} + \alpha_{ij} = -\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$. Звідси $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$. Отримали суперечність. Отже, $j \in I_1$.

Нерівність (2) з урахуванням (5) набуває вигляду $\alpha_{kl} \geq \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jl} = -\alpha_{jk} + \alpha_{jl}$. Звідси $\alpha_{jk} + \alpha_{kl} > \alpha_{jl}$. Нерівність (3) з урахуванням (5) набуває вигляду $\alpha_{kp} \geq \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ip} = -\alpha_{ik} + \alpha_{ip}$. Звідси $\alpha_{ik} + \alpha_{kp} > \alpha_{ip}$. Рівність (3) $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{iq} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}$ з урахуванням (5) набуває вигляду $-\alpha_{ik} + \alpha_{iq} = -\alpha_{jk} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}$. Звідси отримуємо $\alpha_{ik} + \alpha_{kq} = \alpha_{iq}$,

$\alpha_{jk} + \alpha_{kq} = \alpha_{jq}$. Таким чином $i \in I_2$, $j \in I_1$, $k \in I_3$ і для довільних $l \in I_1$, $p \in I_2$, $q \in I_3$ маємо наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} + \alpha_{kl} &= \alpha_{il}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kp} &= \alpha_{jp}, \\ \alpha_{ik} + \alpha_{kq} &= \alpha_{iq}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kq} &= \alpha_{jq}, \\ \alpha_{ik} + \alpha_{kp} &> \alpha_{ip}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kl} &> \alpha_{jl}. \end{aligned} \quad (6)$$

Навпаки, нехай існує розбиття $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, $i \in I_2$, $j \in I_1$, $k \in I_3$ і для довільних $l \in I_1$, $p \in I_2$, $q \in I_3$ маємо співвідношення (6). Покладемо $a = c - \alpha_{ik}$, $b = c - \alpha_{jk}$. Тоді $a + \alpha_{il} = c - \alpha_{ik} + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl} > c - \alpha_{jk} + \alpha_{jl} = b + \alpha_{jl}$ для довільного $l \in I_1$. $b + \alpha_{jp} = c - \alpha_{jk} + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp} > c - \alpha_{ik} + \alpha_{ip} = a + \alpha_{ip}$ для довільного $p \in I_2$.

$a + \alpha_{iq} = c - \alpha_{ik} + \alpha_{iq} = c + \alpha_{kq}$ для довільного $q \in I_3$. $b + \alpha_{jq} = c - \alpha_{jk} + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$ для довільного $q \in I_3$. Тому $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$. Це означає, що $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$.

Ми довели наступну теорему.

Теорема 3.1. Нехай M_1, M_2, M_3 — незвідні проективні ґратки. Тоді $M_1 \cap M_2 = M_3$ тоді і тільки тоді, коли існує розбиття множини $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на непорожні підмножини I_1, I_2, I_3 такі, що виконуються умови (6). Якщо $M_1 \simeq P_i, M_2 \simeq P_j, M_3 \simeq P_k$, де P_i, P_j, P_k $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$ для деяких $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

У сагайдаку Q немає стрілок з точки i у точки з $I_1 \cup I_3 \setminus k$, та з точки j у точки з $I_2 \cup I_3 \setminus k$.

Теорема 3.2. Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$, $P_1, \dots, P_n$ — всі попарно неізоморфні проективні Λ -ґратки $1 = e_1 + \dots + e_n$, $P_i = e_i \Lambda$. $\bigcap_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$, де $\pi^{a_1} P_{m_1}, \dots, \pi^{a_s} P_{m_s}$ — попарно непорівняльні проективні незвідні Λ -ґратки, тоді і тільки тоді, коли існують непорожні підмножини $I_1, I_2, \dots, I_s$ множини індексів $I = \{1, 2, \dots, n\}$ такі, що $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$ та $\alpha_{m_l k} + \alpha_{kp(l)} = \alpha_{m_l p(l)}$ для всіх l та для всіх $p^{(l)} \in I_l$.

Доведення. Нехай $\bigcap_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$. Позначимо $I_l = \{p^{(l)} \in I : a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}} \text{ для всіх } j = 1, \dots, s\}$. Тоді $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} = a + \alpha_{kp^{(l)}}$ для всіх $p \in I_l$. Звідси $a_l = a + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_l p^{(l)}}$. Маємо $a_l + \alpha_{m_l p} = a + \alpha_{kp^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{jp^{(l)}} = (a + \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}}) + \alpha_{m_j p^{(l)}}$. Отримали

$$\alpha_{kp^{(l)}} \geq \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}} + \alpha_{m_j p^{(l)}}. \quad (7)$$

Оскільки $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$, то існує t таке, що $k \in I_t$.

Нерівність (7) виконується, зокрема при $p^{(t)} = k$. Маємо $0 = \alpha_{kk} \geq \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}} + \alpha_{m_j k}$ для всіх j . За кільцевими нерівностями $\alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(j)}} \geq \alpha_{m_j p^{(j)}}$ для всіх j .

Отже, $\alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(j)}} = \alpha_{m_j p^{(j)}}$.

Навпаки, нехай $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$, $I_l \neq \emptyset$ для всіх l та $\alpha_{m_l k} + \alpha_{kp^{(l)}} = \alpha_{m_l p^{(l)}}$ для всіх l та $p^{(l)} \in I_l$.

Покладемо $a_l = a + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_l p^{(l)}} = a - \alpha_{m_l k}$. Тоді $(a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}}) - (a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}}) = (a - \alpha_{m_l k} + \alpha_{m_l p^{(l)}}) - (a - \alpha_{m_j k} + \alpha_{m_j p^{(l)}}) = \alpha_{m_j k} - \alpha_{m_l k} + \alpha_{m_l p^{(l)}} - \alpha_{m_j p^{(l)}} = \alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_j p^{(l)}} \geq 0$. Отже, $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}}$ для всіх l, j та $p^{(l)} \in I_l$.

Враховуючи, що $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} = a + \alpha_{kp^{(l)}}$, отримаємо $\bigcap_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$. Теорему доведено. $\square$

Список використаних джерел

References

1. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish. – 2004. – V.1. – P. 380.
2. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish. – 2007. – V.2. – P. 400.
3. Zavadskij A. G., Torsion-free modules over prime rings / A. G. Zavadskij, V. V. Kirichenko, *Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov Inst. (LOMI)*, v. 57, 1976, p. 100-116.
4. Tarsy R.B. Global dimension of orders / R.B. Tarsy // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – vol. 151. – P. 335-340.
5. Jategaonkar V.A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring / V.A. Jategaonkar // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – vol. 196. – P. 313-330.
6. Fujita H., Tiled orders of finite global dimension / H. Fujita, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. **322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension" *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. **327**, No.2 (1991), pp. 919–920.
7. Zhuravlev V., Projective resolution of irreducible modules over tiled order. / V. Zhuravlev, D. Zhuravlyov. // Algebra and discrete mathematics. Volume 14. **2**. pp. 323 – 336.
1. HAZEWINKEL, M., GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V. (2004) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **575**, Kluwer Acad. Publish. 1. pp.380.
2. HAZEWINKEL, M., GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V. (2007) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **586**, Kluwer Acad. Publish. 2. pp.400.
3. ZAVADSKIY, A.G., KIRICHENKO, V.V. (1976) Torsion-free modules over prime rings. *Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov Inst. (LOMI)*. v. 57, p. 100-116.
4. TARSY, R.B. (1970) Global dimension of orders. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 151. P. 335-340.
5. JATEGAONKAR, V.A. (1974) Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 196. P. 313-330.
6. FUJITA, H. (1990), (1991) Tiled orders of finite global dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. **322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension". *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. **327**, No.2 pp. 919–920.
7. ZHURAVLEV, V.N., ZHURAVLYOV, D.V. (2012) Projective resolution of irreducible modules over tiled order. *Algebra and discrete mathematics*. Volume 14. **2**. pp. 323 – 336.

Received: 10.02.2018