УДК 539.595

Константинов О.В.¹, к.ф.-м.н.

**Керування резервуаром, частково
заповненим рідиною, на основі
принципу найменшого примусу Гауса
(задача гальмування)**

¹ Інститут математики НАН України, 01601,
м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: akonst.im@ukr.net

O.V. Konstantinov¹, Ph.D. (Physics & Mathematics)

**Control of a reservoir partially filled with
liquid based on Gauss's principle of least
constraint (deceleration task)**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01601,
Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@ukr.net

Розглянуто задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею". Для побудови керування використовувався принцип найменшого примусу Гауса, який дозволяє мінімізувати керуюче навантаження та реалізувати задані закони програмного руху. Обчислення керування проводилося на основі спрощеної лінійної моделі з двома ступенями вільності. Показано, що для гальмування резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень необхідно введення нелінійних програмних законів руху.

Ключові слова: принцип Гауса, програмне керування.

The task of constructing control for the motion of a given reservoir - a liquid with a free surface mechanical system is provided in the presence of constant perturbations - the oscillations of the free surface of the liquid. To construct the control, the principle of the least coaxing of Gauss was used, which allows to minimize the control load and implement the given laws of the software movement. The control calculation was carried out on the basis of a simplified linear model with two degrees of freedom, which allowed the control function to be obtained in analytical form for various software laws (including nonlinear) movement of the reservoir and free surface of the liquid. The tank partially filled with a liquid, which initially moves evenly at a given speed, must be completely stopped at a given time. The control, constructed for the implementation of linear software laws of motion, can be used only to provide "comfortable" movements of the reservoir, that is, in the absence of large disturbances of the free surface of the liquid. In order to ensure the movement of the reservoir in the presence of highly intense loads, it is necessary to introduce nonlinear software motion laws for obtaining and using a nonlinear control law.

Key Words: Gauss's principle, program movement.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Однією із важливих задач при практичному використанні конструкцій, які містять в своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, є забезпечення руху таких конструкцій за заданою програмою при найменших силових (енергетичних) витратах. Така задача може бути розв'язана, зокрема, на основі диференціального варіаційного принципу Гауса – принципу найменшого примусу [1]. В даній роботі побудова керування з використанням принципу найменшого примусу Гауса проводилося на основі спрощеної моделі з двома ступенями вільності. Це дозволило

отримати функцію керування в аналітичному вигляді для різних програмних законів (в тому числі, і нелінійних) руху резервуару та вільною поверхні рідини. А от дослідження динаміки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [2]. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Дискретна модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею»

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [2], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Для його ефективного застосування поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

У роботі [2] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» мінімальної розмірності. На основі розробленого методу у роботі [2] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні рухи механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \quad (1)$$

$$+ \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) -$$

$$= -\frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ri}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \left. \right\},$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_F + M_T) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \quad (2)$$

$$= \vec{F} - (M_F + M_T) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\},$$

де ρ – щільність рідини; M_T та M_F – маса резервуару та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар.

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Побудова керування на основі принципу найменшого примусу Гауса

Для побудови керування на основі принципу найменшого примусу Гауса будемо використувати систему рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті ε_y . Введемо позначення для фазових змінних $x_1 = a_1$, $\dot{x}_1 = \dot{a}_1$, $x_3 = \varepsilon_y$, $\dot{x}_4 = \dot{\varepsilon}_y$ та керування $u = F_y$ і запишемо систему (1) – (2) в нормальній формі Коші в узагальненому вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + b_1(x_1, x_2)u, \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)u, \quad (4)$$

де вигляд функцій f_1, f_2, b_1, b_2 залежить від вибору обраної для керування моделі (лінійна або нелінійна до величин відповідного порядку малості).

Відповідно до принципу найменшого примусу Гауса побудуємо керування $u(t)$, яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$ за умови мінімізації функціоналу якості $J = \int u^2(t)dt$. Іншими словами, необхідно побудувати таке керування, яке б забезпечило рух системи відповідно до заданої програми із найменшими силовими (енергетичними) витратами.

Припустимо, що необхідно забезпечити реалізацію програмного руху резервуару, якщо переміщення та швидкість резервуару повинна змінюватись за законом $\psi_2(x_3, x_4, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\psi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) \equiv R_1(\psi_1, x, t), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi_2, x, t). \end{aligned}$$

Отримаємо задачу безумовної мінімізації при наявності двох множників Лагранжа λ_1 та λ_2 для функціоналу якості

$$\begin{aligned} L^* &= u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R_1(\psi_1, x, t) \right) + \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{d\psi_2}{dt} - R_2(\psi_2, x, t) \right). \end{aligned}$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 u &= R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u &= R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2, \end{aligned}$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1, \quad p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2,$$

$$c_1 = R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$c_2 = R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Оберемо для побудови керування лінійну модель та конкретизуємо вигляд системи рівнянь (3) – (4). Лінеаризована система рівнянь (1) – (2) для першої антисиметричній формі a_1 та горизонтального переміщення резервуару ε_y має вигляд у нормальній формі Коші

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \lambda_2 x_1 + \beta_2 u, \quad (6)$$

з відповідними позначеннями для коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$.

Якщо швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, а рідина вважається «затверділою», тобто $\psi_4(x_4, t) \equiv x_1 = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \dot{V}(t) - \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1. \quad (7)$$

Якщо амплітуда коливань вільної поверхні рідини обмежена $|x_1| \leq A$, тобто існує залежність $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_1) = 0$, а швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) \cosh^4(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} - \frac{A^2 \mu^2 \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 \cosh^4(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} x_1 - \frac{A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} x_2. \quad (8)$$

Розглянемо круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальні рухи в площині xOy . Резервуар радіусу $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, співвідношення мас резервуару M_T та рідини M_F дорівнює $M_T = 0,1 M_F$. Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити гальмування резервуару з рідиною до повної зупинки у двох випадках: за 10 сек, якщо спочатку система рухається рівномірно за швидкістю 5 м/с («комфортний» рух) та за 1 сек, якщо система спочатку рухається зі швидкістю 2 м/с (рух з високо інтенсивними навантаженнями).

Рис. 1 Зміна швидкості резервуару в режимі «комфортного» руху

На Рис. 1, 2 показані результати моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі заданих програм руху (7, графік 1) та (8, графік 2) відповідно. Для моделі (8) в законі програмного

руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_1) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,1 R$, $\mu = 2$. Як можна бачити з графіків, тільки нелінійне керування на основі моделі (8) дозволяє забезпечити шуканий програмний рух системи з мінімальними похибками як у випадку «комфортного» руху, так і у випадку високо інтенсивних навантажень на систему.

Рис. 2 Зміна швидкості резервуару в режимі високо інтенсивних навантажень

Висновки

Розглянуто задачу побудови керування на основі принципу найменшого примусу Гауса для забезпечення руху резервуару з рідиною за заданим законом. Обчислення керування проводилося на основі спрощеної лінійної моделі з двома ступенями вільності. Керування, побудоване на основі лінійної моделі, може бути використано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень необхідно введення нелінійних програмних законів руху для отримання і використання нелінійного закону керування.

Список використаних джерел

1. Галиуллин А.С. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.

References

1. HALIULLIN, A. (1987) *Postroenie system programnogo dvizhenija*. Moskva: Nauka.
2. LIMARCHENKO, O., YASINSKII, V. (1997) *Nelinejnaya dinamika konstrukcij s gidkostij*. Kiev: NTU KPI.

Надійшла до редколегії 27.06.19