УДК 539.3

Кушнір Р.М., акад. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.,
Токовий Ю.В., д.ф.-м.н., с.н.с.,
Бойко Д.С., аспірант

**Метод безпосереднього інтегрування у
тривимірних задачах теорії пружності та
термопружності для неоднорідних
трансверсально ізотропних тіл: ключові
рівняння в напруженнях**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

R.M. Kushnir, Acad. NASU, Dr. of Sci., Prof.,
Y.V. Tokovyy, Dr. of Sci., Senior Scientist,
D.S. Boiko, PhD student

**Direct integration method
in three-dimensional elasticity and
thermoelasticity problems for inhomogeneous
transversely isotropic solids: governing
equations in terms of stresses**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mecha-
nics and Mathematics, NAS of Ukraine,
79060, Lviv, 3-B Naukova Str.
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

З метою розвитку методу безпосереднього інтегрування стосовно розв'язування тривимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних анізотропних тіл отримано систему ключових рівнянь такого класу задач для трансверсально ізотропного неоднорідного твердого тіла, пружні та теплофізичні властивості якого є диференційованими функціями змінної, що відповідає перпендикулярно до площини ізотропії напрямку. Отримана система рівнянь зводиться до інтегральних рівнянь другого роду для окремих компонент тензора напружень, які можна розв'язати за допомогою відомих числових, аналітично-числових та аналітичних методик розв'язування інтегральних рівнянь.

Ключові слова: трансверсально ізотропні неоднорідні тіла, метод безпосереднього інтегрування, тривимірна задача, ключові рівняння.

An efficient technique for thermoelastic analysis of inhomogeneous anisotropic solids is suggested within the framework of three-dimensional formulation. By making use of the direct integration method, a system of governing equations is derived in order to solve three-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for transversely isotropic inhomogeneous solids with elastic and thermo-physical properties represented by differentiable functions of the variable in the direction that is transversal to the plane of isotropy. By implementing the relevant separation of variables, the obtained equations can be uncoupled and reduced to second-kind integral equations for individual stress-tensor components and the total stress, which represents the trace of the stress tensor. The latter equations can be attempted by any of the numerical, analytical-numerical, or analytical means available for the solution of the second-kind integral equations. In order to construct the solutions in an explicit form, an advanced solution technique can be developed on the basis of the resolvent-kernel method implying the series representation by the recurring kernels, computed iteratively by the original kernel of an integral equation.

Key Words: transversally isotropic inhomogeneous solids, direct integration method, three-dimensional problem, governing equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Розвиток ефективних методів дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених з неоднорідних композитних матеріалів, передбачає використання моделей анізотропного макро-неоднорідного тіла [2]. По-

будова аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних твердих тіл з довільними профілями просторового розподілу властивостей матеріалу є складною проблемою через необхідність розв'язання ключових рівнянь.

чових рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [5]. У випадку анізотропних неоднорідних матеріалів ця проблема є ще складнішою, оскільки коефіцієнти ключових рівнянь визначаються через змінні пружні та теплофізичні модулі, які є не однаковими у різних просторових напрямках [3, 4]. З огляду на це важливим етапом розв'язування задач такого класу, зокрема, у тривимірній постановці, є отримання систем ключових рівнянь у зручній для побудови їх розв'язків формі.

У статті, з метою розвитку методу безпосереднього інтегрування [1, 6], отримано систему ключових рівнянь у напруженнях для тривимірної задачі теорії пружності та термопружності для трансверсально ізотропних тіл [3], властивості яких змінюються у поперечному до площини ізотропії напрямку. За допомогою відокремлення змінних та методики [7] отримані ключові рівняння зводяться до окремих інтегральних рівнянь для сумарних напружень (першого інваріанта тензора напружень) та кожної з компонент напружень, що з використанням відповідної методики розв'язання інтегральних рівнянь забезпечує розв'язок вихідної задачі.

Розглянемо задачу про пружну рівновагу неоднорідного трансверсально ізотропного тіла V , віднесеного до безрозмірної декартової системи координат (x, y, z) так, що площина ізотропії є паралельною до площини xOy . За відсутності масових сил задача описується рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ly}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{lz}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

де $l = \{x, y, z\}$, та суцільності

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \overline{xyz}, \quad (2)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right), \quad \overline{xyz},$$

де $\overline{xyz}$ означає отримання ще двох рівнянь кожної групи шляхом циклічної перестановки індексів та змінних, за якими ведеться диференціювання. Компоненти тензорів напружень $\sigma_{jl} = \sigma_{lj}$ і деформації $\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{lj}$, $j, l = \{x, y, z\}$, пов'язані фізичними співвідношеннями [3]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} + \alpha T, \quad x \neq y,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E'} \sigma_{zz} - \frac{\nu'}{E'}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha' T, \quad (3)$$

$$G' \varepsilon_{jz} = \sigma_{jz}, \quad j = \{x, y\}, \quad G \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}.$$

Тут E , E' і $G = E / (2 + 2\nu)$, G' – модулі пружності і зсуву у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν' – коефіцієнти Пуассона, що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізотропії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізотропії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку відповідно; α та α' – коефіцієнти лінійного температурного розширення паралельно та перпендикулярно до площини ізотропії; $T = T(x, y, z)$ – розподіл стаціонарного температурного поля, який є заданим або знайденим із відповідної задачі теплопровідності [8]; $x \neq y$ означає отримання ще одного рівняння шляхом взаємної заміни x на y . Вважаємо, що характеристики матеріалу тіла V є диференційованими функціями координати z .

На межі тіла ∂V задано умови в термінах напружень $\sigma \cdot n = f(x, y, z)$, де n – вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂V , а f – заданий на цій поверхні вектор напружень.

Для виведення системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень спершу визначимо дотичні напруження з рівнянь рівноваги (1):

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}, \quad \overline{xyz}. \quad (4)$$

З використанням фізичних співвідношень (3) для нормальних напружень та рівнянь (4) з першого рівняння (2) отримаємо

$$\frac{\Delta \sigma_{zz}}{2G(z)} + \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} = \Delta_{xy} \left(\frac{\sigma}{E(z)} + \alpha(z) T \right), \quad (5)$$

де

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\beta_1(z) = \frac{\nu'(z)E(z) - \nu(z)E'(z)}{E(z)E'(z)},$$

а сумарні напруження мають вигляд

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (6)$$

У такий же спосіб на основі інших двох рівнянь, які визначимо з першого рівняння (2) шляхом циклічної перестановки індексів, отримаємо ще два ключові рівняння

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\sigma_{yy}}{2G(z)} \right) + \beta_2(z) \Delta_{xy} \sigma_{yy} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \\ + \Delta (\beta_1(z) \sigma_{zz}) - \beta_2(z) \Delta \sigma_{zz} - \beta_3(z) \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta_5(z) \sigma - \alpha(z) T) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta_4(z) \sigma - (\alpha(z) + \alpha'(z)) T) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\nu(z) \sigma}{E(z)} - \alpha(z) T \right), \quad x \neq y. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} \beta_2(z) &= \frac{G(z) - G'(z)}{2G(z)G'(z)}, \\ \beta_3(z) &= \frac{2(1 + \nu'(z))G'(z) - E'(z)}{2E'(z)G'(z)}, \\ \beta_4(z) &= \frac{\nu'(z)E(z) - E'(z)}{E(z)E'(z)}, \\ \beta_5(z) &= \frac{E(z) - 2G'(z)}{2E(z)G'(z)}. \end{aligned}$$

Перепишемо рівняння (5) у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\sigma_{zz}}{2G(z)} \right) + \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} = \\ = \Delta_{xy} \left(\frac{\sigma}{E(z)} + \alpha(z) T \right) + \frac{\sigma_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G(z)} \right) + \\ + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G(z)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Додавши рівняння (7) та (8) з урахуванням формули (6), отримаємо ключове рівняння

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1 - \nu(z)}{E(z)} \sigma + (\alpha(z) + \alpha'(z)) T \right) - \\ - \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma = \frac{\sigma_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) + \\ + \beta_6(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} - \beta_2(z) \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} ((2\beta_1(z) - \beta_2(z)) \sigma_{zz} - (\alpha(z) - \alpha'(z)) T). \quad (9)$$

Тут

$$\beta_6(z) = \frac{E'(z) - E(z)}{E(z)E'(z)}.$$

Таким чином вихідні рівняння задач теорії пружності та термопружності (1) – (3) зведено до системи ключових рівнянь (5), (7), (9) та співвідношень (4). У випадку однорідного трансверсально ізотропного матеріалу вказані рівняння зводяться до отриманих у роботі [8].

Слід зауважити, що рівняння (5) та (9) містять як невідомі лише сумарні та нормальні напруження σ та σ_{zz} . Тому з використанням підходу [7] їх можна звести до двох інтегральних рівнянь, які записано окремо для кожної з вказаних функцій. Після їх знаходження з урахуванням відповідних крайових умов, записаних на основі вихідних умов в напруженнях за допомогою рівнянь (1) та співвідношення (6), напруження σ_{xx} та σ_{yy} слід визначити з рівнянь (7) з використанням (4). Після цього дотичні напруження знайдемо з рівнянь (4).

Наприклад, у випадку відсутності температурного поля із застосуванням подвійного інтегрального перетворення Фур'є за змінними у площині ізотропії рівняння (5) та (9) запишемо у вигляді

$$\bar{\Delta} \bar{\sigma}_{zz} = 2s^2 G(z) \beta_1(z) \bar{\sigma}_{zz} - \frac{s^2 \bar{\sigma}}{1 + \nu(z)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \left(\frac{1 - \nu(z)}{E(z)} \bar{\sigma} \right) = \beta_7(z) \bar{\sigma}_{zz} + \\ + \beta_8(z) \frac{d \bar{\sigma}_{zz}}{dz} + \beta_9(z) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $s^2 = s_x^2 + s_y^2$, s_x і s_y – параметри перетворення за x та y ,

$$\bar{\Delta} = \frac{d^2}{dz^2} - s^2,$$

$$\begin{aligned} \beta_7(z) = \frac{d^2}{dz^2} (2\beta_1(z) - \beta_2(z)) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) - \\ - s^2 (\beta_6(z) + (1 + \nu(z) + E(z)\beta_1(z))\beta_1(z)), \end{aligned}$$

$$\beta_8(z) = 2 \frac{d}{dz} (2\beta_1(z) - \beta_2(z)),$$

$$\beta_9(z) = (3 + \nu(z))\beta_1(z) - 2\beta_2(z),$$

а рискою зверху позначено зображення функцій у просторі інтегрального перетворення. Легко бачити, що розв'язавши рівняння (11) відносно $\bar{\sigma}$ та підставивши результат у (10), отримаємо інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_{zz}$, яке можна розв'язати відомими методами. Зокрема, якщо застосувати метод резольвентного ядра [7], вираз для $\bar{\sigma}_{zz}$ знайдемо у вигляді ряду повторних ядер, отриманих рекурентно на основі ядра вихідного інтегрального рівняння. Це дає змогу побудувати явний розв'язок задачі. Зауважимо, що застосування такого підходу дозволяє отримати ключові рівняння без необхідності підвищення диферен-

ціального порядку рівнянь, що у випадку змінних властивостей матеріалу (змінних коефіцієнтів рівнянь) є суттєвою перевагою. Визначальні функції в отриманих рівняннях є фізичними величинами, що дає змогу безпосередньої перевірки адекватності розв'язку шляхом використання загальних критеріїв та принципів механіки деформівного твердого тіла [6]. Метод можна поширити для аналізу трансверсально ізотропних неоднорідних тіл з довільними залежностями властивостей матеріалу від просторових координат.

Список використаних джерел

1. Калиняк Б.М. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл / Б.М. Калиняк, Ю.В. Токовий, А.В. Ясінський // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.
2. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г.Б. Колчин. – Кишинев: Карта Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. Ding H. Elasticity of Transversely Isotropic Materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
5. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials / Y. Tanigawa // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – 48, No. 6. – P. 287–300.
6. Tokovyy Y.V. Direct integration method / Y.V. Tokovyy // in R.B. Hetnarski (ed.) Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014 – 2. – P. 951–960.
7. Tokovyy Y.V. Nonhomogeneous solids: Integral equations approach / Y.V. Tokovyy, B.M. Kalynyak, C.-C. Ma // in R.B. Hetnarski (ed.) Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014 – 7. – P. 3350–3356.
8. Tokovyy Y. Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer / Y. Tokovyy // Journal of Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 1. – P. 49–64.

References

1. KALYNYAK, B.M., TOKOVYY, Y.V., and YASINSKYY, A.V. (2019) Pryami ta obrneni zadachi termomekhaniki stosovno optimizatsiyi ta identifikatsiyi termonapruzhеноho stanu deformivnykh tverdikh til. *Matematichni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 236(1). p. 21–34.
2. KOLCHIN, G.B. (1971) *Raschet elementov konstrukcij iz uprugikh neodnorodnykh materialov*. Chisinau: Kartya Moldoveniaske.
3. LEKHNITSKII, S.G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. Moscow: Nauka.
4. DING, H., CHEN, W., and ZHANG, L. (2006). *Elasticity of transversely isotropic materials*. Dordrecht: Springer.
5. TANIGAWA, Y. (1995) Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanics Reviews*. 48(6). p. 287–300.
6. TOKOVYY, Y.V. (2014). Direct integration method. In R.B. Hetnarski (ed.) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Dordrecht: Springer. 2. p. 951–960.
7. TOKOVYY, Y.V., KALYNYAK, B.M., and MA, C.-C. (2014). Nonhomogeneous solids: Integral equations approach In R. B. Hetnarski (ed.) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Dordrecht: Springer. 7. p. 3350–3356.
8. TOKOVYY, Y. (2019) Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer. *Journal of Thermal Stresses*. 42(1). p. 49–64.

Надійшла до редколегії 12.08.19