УДК 553.982

Лубков М. В. д.ф.-м.н., с.н.с

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Застосування скінчено-елементно-різницьового методу для моделювання фільтраційних процесів

Application of the finite element-differences method for modeling of filtration processes

Полтавська гравіметрична обсерваторія
НАНУ, 36015, м. Полтава, вул. Мясоедова
27/29
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Poltava Gravimetric Observatory of NASU, 36015,
Poltava, Myasoedova st., 27/29
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію результатів у практиці нафто-газовидобування. Для вирішення цих прикладних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод розв'язання задачі п'єзопровідності з урахуванням неоднорідного розподілу фільтраційних параметрів нафто-газоносних пластів та умов інфільтрації нафти і газу на їх границях.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, нафто-газовидобування, комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in the oil and gas production problems. For solving these practical problems, we use combined finite element-differences method of resolving piezoconductivity problem with calculation of heterogeneous filtration parameters distribution of oil and gas productive reservoirs and oil-gas penetration conditions in the borders of the reservoirs. At that, we consider the main factors, which influence on the intensity of filtration processes near oil production well and gas production well respectively. These factors are important for effective supporting in practice high level of the oil and gas production. On the base of computer modeling, we have showed that intensity of filtration process near the acting oil and gas production wells mainly depends on oil phase and respectively gas phase permeability, as in close zone of well acting so in remote zone. The viscosity and reservoir porosity parameters in close and remote zones of the well action have little direct effect on filtration process near the acting well. However, these parameters can influence on the filtration process implicitly via direct acting on the respective phase permeability. We also have carried out analysis of the pumping well influence on the filtration process near production well in different practical cases.

Key Words: computer modeling, oil and gas producing, combined finite element-differences method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У наш час у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих колекторських пластах, виникають унікальні можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних процесів. Це перш за все стосується процесів, які протікають у специфічних неоднорідних продуктивних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Недосяжність для прямих геологічних і фізичних вимірювань у більшості таких об'єктів,

роблять математичне моделювання одним із основних інструментів дослідження.

Ця стаття присвячена моделюванню і практичному застосуванню результатів у нафто- і газовидобуванні. Для вирішення цих практичних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод розв'язання нестационарної задачі п'єзопровідності для рідкої фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутого пласта [1, 2, 3]. У випадку нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо

скористатись двовимірною постановкою задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \chi_n \left(\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} \right) + \gamma_n; \quad (1)$$

$$P_n(t=0) = P_n^0; \quad (2)$$

$$k_n \text{grad} P_n = \alpha_n (P_n - P_{zp}). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_n(x, y, t)$ – тиск пласта, як функція координат і часу; $\chi_n = \frac{k_n}{\eta_n(m_n\beta_1^n + \beta_2^n)}$ – коефіцієнт п'єзопровідності нафти; η_n – коефіцієнт в'язкості нафти; m_n – коефіцієнт пористості пласта; β_1^n – стискання нафти; β_2^n – стискання скелету порід пласта; γ_n – параметр витоку нафти в пласті; P_n^0 – початковий тиск нафти у пласті; k_n – коефіцієнт проникності нафтової фази; α_n – коефіцієнт інфільтрації нафтової фази на границях розглянутої області; P_{zp} – тиск на границях розглянутої області. Відповідно у випадку газоносного пласта двовимірною задачею п'єзопровідності Лейбензона набуває вигляду:

$$\frac{\partial P_z^2}{\partial t} = \chi_z \left(\frac{\partial^2 P_z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_z^2}{\partial y^2} \right) + \gamma_z; \quad (4)$$

$$P_z(t=0) = P_z^0; \quad (5)$$

$$k_z^2 \text{grad} P_z^2 = \alpha_z^2 (P_z^2 - P_{zp}^2). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газової фази (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутого пласта; $\chi_z = \frac{k_z P_z^0}{\eta_z m_z}$ – коефіцієнт п'єзопровідності газової фази (Лейбензона). Представлені тут параметри газоносного пласта відповідають аналогічним за індексними позначеннями параметрам нафтоносного пласта.

2. Метод розв'язання задач

У подальшому для спрощення запису математичних виразів індекси, що означають належність до нафтової або газової фази будемо опускати. Для розв'язання нестационарної задачі

п'єзопровідності (1–3) застосовується варіаційний скінчено-елементний метод, що приводить до розв'язання варіаційного рівняння п'єзопровідності [3]:

$$\delta I(P) = 0. \quad (7)$$

Тут $I(P)$ – функціонал задачі п'єзопровідності (1) – (3), який представляється у вигляді [3]:

$$I(P) = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ k \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \int_{P_0}^P \frac{k}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} \times \right. \\ \left. \times dP - 2\gamma P \right\} dx dy - \frac{1}{2} \int_L \alpha (P - 2P_{zp}) P dl; \quad (8)$$

S – площа перерізу області, яка досліджується, L – контур, що охоплює площу S , dl – елемент контуру. При розв'язанні варіаційного рівняння (7) застосовується восьмивузловий ізопараметричний чотирикутний скінчений елемент [3]. Як глобальна система координат, де відбувається об'єднання всіх скінчених елементів, на які розбито площу S , використовується декартова система (x, y) . В якості локальної системи координат, де в межах скінченого елемента визначаються функції апроксимації φ_i на основі квадратичних поліномів і проводиться чисельне інтегрування, використовується нормалізована система координат (ξ, η) [3]. В цій системі координати, тиск, початковий тиск пласта, тиск на границях області, коефіцієнт інфільтрації нафти на межах області, а також похідні від тиску по координатах апроксимуються наступним чином:

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i; y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i; P = \sum_{i=1}^8 P_i \varphi_i; \\ P_0 = \sum_{i=1}^8 P_{0i} \varphi_i; P_{zp} = \sum_{i=1}^8 P_{zpi} \varphi_i; \alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \varphi_i;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 P_i \Psi_i; \frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 P_i \Phi_i; \\ \Psi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right); \\ \Phi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right); \quad (9)$$

$$J = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \text{– якобіан переходу між}$$

системами координат (x, y) і (ξ, η) .

Виходячи з варіаційного рівняння (7) і вважаючи, що вузлові значення від похідних тиску за часом dP_i/dt є відомими величинами і не варіюються, складемо систему диференціаль-

них рівнянь для n -го вузла p -го скінченного елемента у вигляді:

$$\frac{\partial I_p}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^8 \{H_{ni}^p \frac{dP_i}{dt} + (A_{ni}^p + Q_{ni}^p)P_i - Q_{ni}^p P_0^i\} - \gamma_n^p = 0; \quad (10)$$

$$H_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{k^p}{\chi^p} \varphi_i \varphi_j |J| d\xi d\eta;$$

$$A_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k^p (\Psi_i \Psi_j + \Phi_i \Phi_j) |J| d\xi d\eta;$$

$$Q_{ij}^p = \int_L \alpha \varphi_i \varphi_j dl; \gamma_i^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma^p \varphi_i |J| d\xi d\eta.$$

Для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (10) при початкових умовах з (9) використовується метод скінчених різниць, в якому апроксимація похідної за часом здійснюється на основі неявної різницевої схеми [1, 5]:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Підставляючи вираз (11) в систему (10), отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^8 \{(\frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p + A_{ni}^p + Q_{ni}^p)P_i(t + \Delta t) - \frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p P_i(t) - Q_{ni}^p P_0^i\} - \gamma_n^p = 0 \quad (n=1-8). \quad (12)$$

Додаючи рівняння (12) по всіх скінчених елементах, отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначати невідомі значення тиску в момент часу $t + \Delta t$ через їх значення в попередній момент часу t . Розв'язання глобальної системи рівнянь здійснюється на основі чисельного методу Гауса без вибору головного елемента [3]. В результаті розв'язання, тиск визначається в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. По знайдених вузлових значеннях тиск визначається у довільній точці нафтоносного пласта досліджуваної області будь-який момент часу.

При розгляді задачі п'єзопровідності для газової фази (Лейбензона) (4-6), після заміни $\tilde{P} = P^2$ хід розв'язання задачі подібний.

3. Моделювання процесів фільтрації у нафтоносному пласті

Розглянемо нафтоносну пластову ділянку в околиці діючої нафтовидобувної свердловини розміром 90×90 м². Оберемо деякі характерні

середні параметри нафтоносного пласта [1, 2]: $k = 1$ Д (Дарсі) = 10^{-12} м²; $m = 0,2$; $\eta = 10^{-3}$ Па·с; $\beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹; $\beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹. В цьому випадку коефіцієнт п'єзопровідності $\chi = 3,33$ м²/с. При моделюванні розподілу тисків у розглянутій пластовій ділянці припустимо, що початковий тиск у пласті дорівнює 200 атм, середня потужність видобувної свердловини складає 173 м³ нафти на добу.

Рис. 1 Розподіл встановленого тиску в околиці нафтовидобувної свердловини при збільшенні проникності нафтової фази у ближній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d < 5$ м).

Рис. 2 Розподіл встановленого тиску в околиці нафтовидобувної свердловини при збільшенні проникності нафтової фази у дальній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d > 5$ м).

4. Моделювання процесів фільтрації у газоносному пласті

Розглянемо процеси фільтрації продуктивного газоносного пласта в околиці видобувної свердловини потужністю 11520 м³ на добу при пластовому тиску 10 МПа. З урахуванням розширення газу, при виході на поверхню потужність свердловини буде складати $1,152 \cdot 10^6$ м³ на добу. Припустимо, що розміри розглянутого газоносного пласта 9×9 км². Виберемо деякі

характерні середні параметри газоносного пласта [1, 2]: $k = 0,0012$ Д (Дарсі) $= 0,12 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $m = 0,15$; $\eta = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $P_0 = 100 \text{ атм}$. В цьому випадку коефіцієнт п'єзопровідності Лейбензона $\chi = 0,45 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$.

Рис. 3 Розподіл тиску в околиці газовидобувної свердловини при збільшенні проникності газової фази у ближній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d < 500 \text{ м}$) через 100 діб після початку дії.

Рис. 4 Розподіл тиску в околиці газовидобувної свердловини при збільшенні

проникності газової фази у дальній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d > 500 \text{ м}$) через 100 діб після початку дії.

Висновки

Результати моделювання показують, що інтенсивність процесу фільтрації в околицях нафтогазовидобувних свердловин головним чином залежить від розподілу проникності нафтової і відповідно газової фази, як у близькій так і віддаленій зонах дії свердловини. Причому вплив проникності відповідної фази у віддаленій зоні більший у порівнянні з впливом у близькій зоні дії свердловини. В'язкість та пористість нафтогазоносного пласта у близькій та віддаленій зонах дії свердловини явним чином мало впливають на процес фільтрації в околиці видобувної свердловини. Проте ці параметри можуть впливати на коефіцієнт проникності відповідної фази безпосередньо і тим самим змінювати інтенсивність процесу фільтрації поблизу свердловини. Аналіз динаміки впливу нагнітальної рідини або газу на інтенсивність фільтраційного процесу навколо видобувної свердловини в залежності від проникності відповідної фази і розташування нагнітальної свердловини показує, що для стабільного підтримання достатньо високого рівня тиску в околиці видобувної свердловини при низьких параметрах відповідних фазових проникностей необхідно використовувати нагнітальні свердловини.

Список використаних джерел

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2004. – 416 с.
2. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 479 с.
3. Лубков М. В. Моделювання продуктивного тиску в неоднорідних нафтоносних пластах / М.В. Лубков // Геоінформатика. – 2017. – 3(63). – С. 23 – 29.

References

1. AZIZ, H. (2004) *Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
2. BASNIEV, K., DMITRIEV, N., ROZENBERG, G. (2003) *Neftegazovaja gidromekhanika: uchebnoe posobie dlja vuzov*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
3. LUBKOV, M. (2017) Modelyuvannya produktyvnogo ty'sku v neodnorodny'h naftonosny'h plastax. *Geoinformatics*. 63(2). p. 23 – 29.

Надійшла до редколегії 01.06.19