УДК 539.375

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.

**Згин зосередженою силою тонкої
пластини, розташованої на пружній
основі та послабленої контактною
тріщиною**

^{1,2} Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

M. V. Makoviichuk¹, Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi², Dr. Phys. & Math. Sc.

**Bending by concentrated force of thin plate
located on elastic foundation and weakened by
contact crack**

^{1,2} Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute
for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykytynetska str., 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

У двовимірній постановці розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів тріщини під час згину зосередженою силою пластини на пружній основі Вінклера. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в лицьовій поверхні пластини. Досліджено розподіл контактної реакції на лінії тріщини, а також вплив жорсткості пружної основи та закриття дефекту на граничну рівновагу пластини у залежності від координати точки прикладання зосередженої сили. Встановлено область коректності постановки задачі, коли закриття тріщини відбувається по всій довжині.

Ключові слова: пластина, пружна основа, закриття тріщини, зосереджена сила, згин, міцність.

The paper considers the two-dimensional formulation of the problem of the contact interaction of the crack edges in a plate bent by the concentrated force on the elastic Winkler foundation. The crack closure is described using the model of contact along a line in one of the plate surfaces. Within the framework of this model, the boundary value problem is formulated for the equations of the classical theories of plate bending on the elastic foundation and a plane stress state with interrelated tension and bending conditions on the crack line. The obtained boundary value problem has been solved using singular integral equations method.

Based on numerical solutions of the integral equation the dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defect tips and distribution of contact forces along the crack line on the parameters of elastic foundation stiffness and the coordinate of the application point of the load have been investigated. The effect of crack closure and influence of the elastic foundation stiffness on the limit equilibrium of the plate, depending on the coordinate of the point of application of the concentrated force, has been evaluated. The area of the correctness of the problem statement when the crack closure occurs throughout its length has been established. It was found that the crack closure leads to the appearance of nonzero forces intensity factor, reduction of the moments intensity factor and increase of the limit load. The dependences of the forces and moments intensity factors and the limit load on the dimensionless coordinate of the point of application of the concentrated force are nonmonotonic. Numerical analysis showed that increasing the elastic foundation stiffness, as well as the displacement of the point of application of the force from the center of the cut, increase the limit load and weaken the contact reaction.

Key Words: plate, elastic foundation, crack closure, concentrated force, bending, strength.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Дослідження міцності тонкостінних конструкцій на пружній основі стосується широкого кола інженерних проблем у різних

галузях промисловості. Однією з особливостей таких задач є явище повного або часткового закриття дефектів в зоні стискаючих напружень, яке зручно

аналізувати у двовимірній постановці на основі моделі контакту вздовж лінії [1].

У даній роботі досліджується вплив контакту берегів тріщини та жорсткості пружної основи на напружено-деформований стан та несучу здатність пластини під дією локального навантаження.

Постановка та інтегральне рівняння задачі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, підкріплену пружною основою Вінклера. Нехай на лінії тріщини на

відстані a від її центру прикладено зосереджену силу P перпендикулярно до пластини. Решта поверхонь пластини вільна від навантаження та в'язей. Дослідимо вплив закриття тріщини та жорсткості пружної основи на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пластини.

Введемо систему декартових координат $Oxyz$ з початком у центрі розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії (рис. 1).

Рис. 1. Тріщина у пластині на пружній основі з прикладеною зосередженою силою

У рамках двовимірних теорій така задача зводиться до розв'язання рівнянь згину пластин на вінклеровій основі та плоского напруженого стану з взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізі і нульовими на нескінченності [2, 3]:

$$D\Delta\Delta w + kw = P\delta(x-a)\delta(y), \quad \Delta\Delta\phi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2; \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, \quad M_y = hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут ϕ – функція напружень, w – прогин пластини; $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$, h – півтовщина пластини, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; k – коефіцієнт жорсткості основи; Δ – оператор Лапласа; $L = (-l, l)$ – контур тріщини; $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини, $[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі; N_{ij} – мембранні сили, M_{ij} – моменти; $\delta(x)$ – функція Дірака.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі скористались методом сингулярних інтегральних рівнянь [4]. Повторюючи процедуру, наведену в статтях [1, 2], приходимо до сингулярного інтегродиференціального рівняння відносно знакосталого за припущенням стрибка кута повороту нормалі:

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \frac{3(1-\nu^2)}{\xi-x} + K_0(\xi-x) \right\} [\theta_y]'(\xi) d\xi = M_y^0(x, 0), \quad x \in (-l, l); \quad [\theta_y](\pm l) = 0. \quad (4)$$

Тут

$$K_0(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left(\frac{2}{|\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - 2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz;$$

$$M_y^0(x, 0) = \frac{P}{2\pi} \left(\nu \operatorname{kei}''(\gamma|x-a|) + \frac{\gamma}{|x-a|} \operatorname{kei}'(\gamma|x-a|) \right);$$

$$\gamma = (k/D)^{1/4}, \quad z = \xi - x.$$

Аналіз результатів

Числовий розв'язок задачі (4), отримали методом квадратур [4] при $\nu = 0.3$. За знайденим розв'язком $[\theta_y]$ визначали розкриття тріщини $[u_y]$, контактну реакцію у довільній точці розрізу та коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у вершинах тріщини:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_M^\pm = \pm \frac{Da_0}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x).$$

Граничне навантаження P_* , при якому починається розповсюдження тріщини отримали на основі енергетичного критерію руйнування за умов комбінованого розтягу та згину [5]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*.$$

Тут $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Встановлено залежності безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N^+ = hK_N^+ / P\sqrt{l}$, моментів $\tilde{K}_M^+ = K_M^+ / P\sqrt{l}$ та граничного навантаження $\tilde{P}_* = P_* / P^0$ ($P^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)}$) для правої вершини тріщини від параметра жорсткості основи $\lambda = l\gamma = l(k/D)^{1/4}$ за різних значень $\alpha = a/l$ (рис. 2). Суцільними лініями наведено результати з урахуванням, а штриховими – без урахування контакту. Спостерігаємо немонотонну залежність результатів від координати точки прикладання навантаження α . Найменші значення для граничного навантаження отримаємо при $\alpha=1$, що відповідає розташуванню навантаження у вершині тріщини.

Суцільні лінії на рис. 2 обриваються при $\lambda = \lambda_*$, якщо $\lambda > \lambda_*$, то порушується умова контакту $N_y \leq 0$ і потрібно розв'язувати мішану задачу. Область допустимих значень параметра жорсткості основи, для яких контакт відбувається по всій довжині розрізу, показана на рис. 3.

Рис. 2. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N^+$, моментів $\tilde{K}_M^+$ та граничного навантаження $\tilde{P}_*$ від параметра λ за різних значень α .

Розподіл безрозмірної контактної реакції вздовж тріщини побудовано для фіксованих значень координати α при $\lambda = 0.5$ (рис. 4).

Рис. 3. Залежність граничних значень параметра основи λ_* від координати α

Рис. 4. Розподіл контактної реакції на розрізі ($t = x/l$) для різних значень α

Список використаних джерел

1. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
2. Шацький І.П. Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі / І.П. Шацький, М.В. Маковійчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 3. – С. 59–62.
3. Маковійчук М.В. Про взаємодію берегів тріщини у пластині на пружній основі під час згину зосередженою силою / М.В. Маковійчук // Конф. молод. учених «Підстригачівські читання – 2012». Тези доп. – Львів, 2012. – С. 53 – 54.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

Висновки

Встановлено, що закриття тріщини призводить до появи ненульових коефіцієнтів інтенсивності зусиль, зменшення коефіцієнтів інтенсивності моментів і збільшення граничного навантаження. Залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль, моментів та граничного навантаження від безрозмірної координати точки прикладання зосередженої сили є немонотонна. Із збільшенням жорсткості основи, а також при віддаленні точки прикладання зосередженої сили від центра розрізу руйнівне навантаження зростає, а контактна реакція послаблюється. Найменші значення граничного навантаження отримано у випадку прикладання зосередженої сили у вершині тріщини.

References

1. SHATSKYI, I. P. (1988) Zgyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuyuchymy beregamy. *Dop. AN URSS. Ser. A.* (7). – p. 49-51.
2. SHATSKYI, I. P. & MAKOVICHUK, M. V. (2003) Kontaktna vzayemodiya beregiv trishchyny pid chas zgynu plastyny na pruzhniy osnovi. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, 39 (3). p. 59-62.
3. MAKOVICHUK, M. V. (2012) Pro vzayemodiyu beregiv trishchyny u plastyni na pruzhnii osnovi pid chas zgynu zoseredzhenoyu siloyu. In *Conference of Young Scientists «Pidstryhachivskiy chytannya – 2012»*, 23d to 25th May 2012. Lviv – pp. 53-54.
4. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
5. OSADCHUK, V. A. (1985) *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 20.06.19