УДК 539.3

Онишкевич В. М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Сулим Г. Т.², д.ф.-м.н., проф.

**Урахування зношування при плоскому
контакті прямокутного штампа з
пружною півплощиною**

¹ Національний лісотехнічний університет
України, 79057, м. Львів, вул. Генерала
Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

V. M. Onyshkevych¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc.
Prof.,
G. T. Sulym², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Consideration of wear in plane contact of
rectangular punch and elastic half-plane**

¹ Ukrainian National Forestry University, 79057,
L'viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням, що призводять до системи нелінійних алгебричних рівнянь. Отримано еволюцію контактних напружень, зношування і стирання в часі.

Ключові слова: контакт, тертя, зношування.

The plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. Arising thermal effects are neglected because the problem is investigated in stationary statement. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load. The solution for problem of theory of elasticity is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraical equations for unknown coefficients by a method of collocations. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of maximum and minimum wear. The iterative scheme is considered for investigation of other nonlinear cases, for initial approximation the mean value of boundary cases is used. The evolutions of contact stresses, wear and abrasion in the time are given. For both last cases increase or invariable of vertical displacement correspondently is obtained. In the boundary cases coincidence of results with known is obtained.

Key Words: contact, friction, wear.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Уперше задачі з урахуванням зносу досліджувалися в [1, 2], а математичні моделі зношування було наведено в [3]. Осесиметричну контактну задачу із зношуванням для кругового штампа і півпростору розв'язано в [4]. Задачу про

термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя розв'язано в [5].

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Температурними

ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Нехай до моменту часу $\tau=0$ під втиснутим силою P у пружну півплощину штампом тиск стаціонарно розподілявся, змінюючи мікронерівності поверхні. З моменту часу $\tau=0$ штамп рухається з постійною швидкістю V_0 і відбувається стирання півплощини. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена.

Рис. 1 Геометрія задачі

2. Математична постановка задачі

Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial y = 0, \quad (2)$$

де $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$, u і v – компоненти вектора переміщень, λ і μ – коефіцієнти Ламе, за таких граничних умов при $y=0$:

$$v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty. \quad (5)$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом, a – півширина штампа, H_b – твердість за Брінелем матеріала півплощини, τ – час. Процес зношування визначається параметрами [6] k_1 , k_2 , $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. Розв'язок задачі для півплощини

Застосовуючи до рівнянь (1)-(2) інтегральне перетворення Фур'є та задовольняючи граничним умовам (3)-(5), отримаємо парні інтегральні рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) C_1 \xi^2 e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a \quad (7)$$

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (8)$$

Продовжуючи (8) на всю вісь x за допомогою функції Хевісайда

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = \sigma_y(x) H(a - |x|)$$

та представляючи нормальні напруження у вигляді ряду Фур'є

$$\sigma_y(x) = \sum_{n=-N}^N a_n \exp(i\pi n x / a), \quad (9)$$

із співвідношень (7)-(8) отримаємо:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi + 2\pi \left(\frac{k_1 V_0 \tau}{H_b} + k_2 \right) \left(\sum_{n=-N}^N a_n \exp \frac{i\pi n x}{a} \right)^\alpha = -2\pi f(x).$$

Використавши метод точкової колокації при $x = x_j = -a + a(j-1)/N$, $(j = \overline{1, 2N+1})$, для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n , $(n = \overline{1, 2N+1})$ отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\bar{z} \|A\| + C(\bar{z} \|D\|)^\alpha = \bar{b}, \quad (10)$$

де

$$\bar{z} = (a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_{N-1}, a_N) = (z_1, z_2, \dots, z_{2N+1}),$$

$$C = 2\pi(k_1 V_0 \tau / H_b + k_2), \quad b_j = -2\pi f(x_j),$$

$$a_{k,j} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi k / a)} e^{-i\xi x} d\xi,$$

$$d_{k,j} = \exp(i\pi kx/a), \quad (k, j = \overline{1, 2N+1}).$$

4. Розв'язання системи рівнянь

При $\alpha = 1$ та $\alpha = 0$ нелінійна система рівнянь (10) перетворюється у лінійну і відповідно набуває вигляду

$$\bar{z}_1 \|A\| + C(\|D\|) = \bar{b} \quad (11)$$

та

$$\bar{z}_0 \|A\| = \bar{b} - \bar{c}. \quad (12)$$

Граничні випадки ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше і найбільше зношування. При $0 < \alpha < 1$ розв'язок (10) буде міститися між розв'язками задач (11) і (12).

Для розв'язання нелінійної системи рівнянь (10) використаємо метод простої ітерації. Представимо систему у вигляді

$$\bar{z} = \bar{g}(\bar{z}) \quad \text{або} \quad z_j = g_j(z_1, z_2, \dots, z_k), \quad (k = 2N + 1),$$

де

$$g_j(z_1, z_2, \dots, z_k) = -\frac{1}{a_{j,j}} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{m=j+1}^{j-1} a_{j,m} z_m + \sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m + C \left(\sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m \right)^\alpha \right\} + b_j.$$

Ітерація проводилась за формулою $\bar{z}^{(n+1)} = \bar{g}(\bar{z}^{(n)})$, тобто $z_j^{(n+1)} = g_j(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)})$, ($j = \overline{1, k}$), або інакше

$$\begin{cases} z_1^{(n+1)} = g_1(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ z_2^{(n+1)} = g_2(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ \dots\dots\dots \\ z_k^{(n+1)} = g_k(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \end{cases} \quad (13)$$

За нульове наближення вибираємо середнє значення $\bar{z}^{(0)} = (\bar{z}_0 + \bar{z}_1)/2$ між розв'язком задачі (11) і (12).

5. Числовий аналіз

Числові результати отримано при таких значеннях вхідних параметрів (система SI):

матеріал півплощини – алюміній ($H_B = 11.3$, $\lambda = 5.6 \times 10^{10}$, $\mu = 2.6 \times 10^{10}$), $V_0 = 0.25$, $a = 0.25$, $k_1 = 10^{-10}$, $k_2 = 10^{-11}$, $f(x) = \text{const} = 0.01$, $N = 23$.

Рис. 2. Розподіл переміщень та приведених напружень при $\tau = 0$ ($1 - \alpha = 0$, $2 - \alpha = 1$)

Рис. 3. Розподіл переміщень та приведених напружень при $\tau = 100$ ($1 - \alpha = 0$, $2 - \alpha = 1$)

Розподіл переміщень v та приведених напружень $\sigma_y^* = 2\sigma_y a / P$ наведено на рис. 2 та рис. 3 відповідно при $\tau = 0$ і $\tau = 100$. Криві 1 відповідають $\alpha = 0$, а криві 2 – $\alpha = 1$. Значення сили P обчислювалося за формулою:

$$P = -\int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) dx = -\int_{-a}^{+a} \sum_{k=-N}^N z_{N+k+1} \exp \frac{i\pi kx}{a} = -2az_{N+1}$$

У випадку $\alpha=1$ із збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про збільшення величини зношення матеріалу (криві 2 на рис. 2 та рис. 3). Випадку $\alpha=0$ відповідають постійні переміщення v (криві 1 на рис. 2 та рис. 3).

Отримані результати для граничного випадку $\alpha=0$, $\tau=0$ співпадають з відомими в літературі [1].

Відзначимо, що на одержаний розв'язок потрібно накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = f_T \sigma_y$, де f_T – коефіцієнт тертя, а σ_y представлені формулою (9).

Список використаних джерел

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа / Л.А. Галин // ПММ. – 1976. – Т.40, №6. – С. 981-989.
2. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей / М.В. Коровчинский // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел / В.М. Александров // ДАН СССР. – 1983. – Т.271, №4. – С. 827-831.
4. Онишкевич В.М. Осесимметрична контактна задача із зношуванням / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 38. – С. 60-63.
5. Онишкевич В. М. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя / В. М. Онишкевич, Г. Т. Сулим // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2017. – № 3. – С. 165-168.
6. Гавриков М.В. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта / М.В. Гавриков, Р.И. Мазинг // Трение и износ. – 1988. – Т.9, №2. – С. 274-279.

References

1. GALIN, L.A. (1976) Kontaknyie zadachi teoryi uprugosti pri nalichiyi iznosa. *PMM*. 40(6). p.981-989.
2. KOROVCHINSKYI, M.V. (1971) Lokalnyi kontakt uprugih tel pri iznashivaniyi ih poverhnostey. *Kontaknoye vzaimodeystviye tverdyh tel i raschet sil treniya i iznosa eoryya reshetok*. Moskva: Nauka.
3. ALEKSANDROV, V.M. (1983) O postanovke ploskih kontaknyh zadach teoryi uprugosti pri iznose vzaimodeystvuyushchih tel. *DAN SSSR*. 271(4). p.827-831.
4. LEVYTSKYI, V.P. & ONYSHKEVYCH, V.M. (1993) Osesymetrychna kontaktna zadacha iz znoshuvanniam. *Bulletin of Lviv University. Series: Mechanics & Mathematics*. 38. p.60-63.
5. ONYSHKEVYCH, V. M. & SULYM, G. T. (2017) Zadacha pro termoprzhnyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorenniya vid tertya. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 3. p.165-168.
6. GAVRIKOV, M.V. & MAZING, R.I. (1988) Nasledstvenno-stareyushchaya model iznashivaniya i eyo primeneniye k zadacham s monotonno rastushchey zonoy kontakta. *Treniye i iznos*. 9(2). p.274-279.

Надійшла до редколегії 29.05.19