УДК 532.5

Остос О. Х., аспірант,
Жук Я. О., д.ф.-м.н, проф.

Термомеханічна задача про коливання в'язкопружного гумоподібного стержня при динамічному навантаженні

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com;
y.zhuk@i.ua

O. J. Ostos, Ph.D. Student,
Y. A. Zhuk, Dr.Sci., (Phys.-Math.)

Thermomechanical problem on vibration of a viscoelastic rubberlike rod under dynamic loading

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova pr., 4e
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com;
y.zhuk@i.ua

Розглянуто задачу про коливання в'язкопружного стержня при динамічному навантаженні, прикладеному на одному з його кінців. Досліджено термомеханічні властивості гумоподібного неогуківського матеріалу. Для розв'язання задачі використано концепцію комплексних модулів. Отримані амплітудно-частотні характеристики для напруження та деформації. Введено дисипативну функцію, за допомогою якої досягнуто дисипативний розігрів стержня. На основі скінченно-елементної моделі побудовано розв'язок задачі з врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу. Проаналізовано результати згідно з класичною теорією термoprужності. Зроблені відповідні висновки щодо поведінки гумоподібного матеріалу при термомеханічному навантаженні. Перевірено достовірність значень частот для перших резонансів на основі теоретичних розрахунків.

Ключові слова: неогуківський матеріал, динамічне навантаження, дисипативна функція, термoprужність.

The problem on vibration of a viscoelastic rod under dynamic load at one of its ends is considered. The external loading has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. By using the complex moduli, the problem on vibration of the viscoelastic rod was solved. The complex shear and Young's moduli of a rubberlike material should exhibit the same dependence on frequency. The properties of a rubberlike material was applied. The temperature influence is associated both with the Newton boundary conditions and dissipative heating. The dissipative function is expressed in terms of deformations. The frequencies of high-damping materials occur at or near frequencies that are normally of interest in vibration problems at room temperature. For solving the problem a finite element model was applied. Using this model, qualitative analysis of the influence of dynamic load and dissipative heating on the resonant vibrations of viscoelastic rod is performed. According to the theory of viscoelasticity an analysis of the results was done. The reliability of the values of frequencies for the first resonances was checked. The numerical results of the problem on vibration of a viscoelastic cylindrical rod under dynamic load at one of its end by the general thermomechanical laws on vibration in damped mechanical systems were obtained and investigated. Distribution of the temperature of dissipative heating along the rod axis is analyzed.

Key Words: Neo-Hookean material, dynamic load, dissipative function, thermomechanics.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Важливість дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкції, які складаються з полімерів та еластомерів, виникає в багатьох сферах сучасної техніки, у тому числі при розрахунку механічного та теплового стану гумотехнічних виробів, віброізоляторів,

великогабаритних пневматичних шин тощо. Внаслідок таких специфічних властивостей цих матеріалів, як істотна залежність механічних характеристик від температури, низька теплопровідність, значні внутрішні втрати, тривале динамічне навантаження може супроводжуватися високим рівнем дисипативного розігріву. Взаємодія теплових та механічних полів у

в'язкопружних тілах вивчається в межах теорії термов'язкопружності. В нинішній час, термомеханічний стан еластомерних елементів досліджується зазвичай на основі розв'язання зв'язаних задач лінійної термов'язкопружності, в яких співвідношення між напруженнями та деформаціями є лінійними, хоча при цьому враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Демпфуюча здатність матеріалу грає величезну роль в динамічній поведінці конструкції. Вона призводить до значного зниження амплітуд при вимушених коливаннях та згладжування напружень в зоні концентрації при коливаннях.

2. Постановка задачі

Рис. 1. Схема навантаження

Розглянемо задачу про дисипативний розігрів при гармонічних коливаннях скінченного циліндричного стержня $0 \leq z \leq l$ та радіусом R , із заданою динамічною умовою на його верхньому кінці

$$\tilde{\sigma}_z|_{z=l} = P \quad (1)$$

Нижній край стержня жорстко закріплений.

Гармонічні коливання у в'язкопружному середовищі у спрощеній постановці описуються рівнянням виду

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2)$$

$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + i\mathbf{u}''$ – комплексна амплітуда переміщень, ρ – густина матеріалу,

$$\tilde{\lambda} = \frac{\nu \tilde{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\nu)}, \quad \tilde{E} = E' + iE'' -$$

комплексні коефіцієнти Ламе та модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, ω – кругова частота коливань.

Рис. 2. Схема теплової задачі

При коливаннях в'язкопружного матеріалу відбуваються втрати енергії, що призводить до його нагрівання. Інтенсивність виділення тепла при гармонічних коливаннях описується усередненою дисипативною функцією, яка може бути виражена через амплітуди деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ у формі}$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = \frac{\omega}{2} [& \lambda'' \{ (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33})^2 + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33})^2 \} + \\ & + \mu'' \{ 2(\varepsilon'^2_{11} + \varepsilon'^2_{22} + \varepsilon'^2_{33}) + (\gamma'^2_{12} + \gamma'^2_{13} + \gamma'^2_{23}) + \\ & + 2(\varepsilon''^2_{11} + \varepsilon''^2_{22} + \varepsilon''^2_{33}) + (\gamma''^2_{12} + \gamma''^2_{13} + \gamma''^2_{23}) \}], \end{aligned} \quad (3)$$

де $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$.

Передачу тепла у середовищі будемо описувати рівнянням теплопровідності відносно наближених, усереднених за період коливань значень температури $\bar{T}$

$$k \nabla^2 \bar{T} + \bar{D} = \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}, \quad (4)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність. У початковий момент часу стержень має температуру навколишнього середо-

вища T_0 . На його бічній поверхні накладаються умови Ньютона

$$Q = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \Big|_{r=R} = \alpha(\bar{T} - T_0) \quad (3),$$

де Q – густина теплового потоку, α – коефіцієнт тепловіддачі.

3. Розв'язок задачі та результати

При чисельному розрахунку задачі були взяті наступні значення:

$$R = 0,01 \text{ м}, l = 0,2 \text{ м}, P = 1000 \text{ Па}, T_0 = 20^\circ\text{C}.$$

Для отриманої зв'язаної термомеханічної задачі в якості гумоподібного матеріалу був вибраний неогуківський матеріал, який має наступні термомеханічні величини:

$$E' = 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$E'' = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu' = G' = \frac{E'}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu'' = G'' = \frac{E''}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\nu = 0,49, \quad \rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

де $\tilde{G} = G' + iG''$ – комплексний модуль зсуву.

$$K' = \frac{E'}{3(1-2\nu)} = 1,667 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$C_{10} = \frac{\mu'}{2} = 1,678 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$D_1 = \frac{2}{K'} = 1,2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}},$$

$$c = 2000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \alpha = 9,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}},$$

$$k = 0,08 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Задача розглядалася в наступному частотному діапазоні: $0 \leq f \leq 1000$ Гц, а розв'язок задачі будувався в околі першого резонансу $f = 114$ Гц.

Використовуючи скінченно-елементну модель, був отриманий розподіл температури вздовж стержня при частоті, близькій до резонансної при заданих механічних та теплових умовах. На малюнку наведений цей розподіл, де значення температур вказані в градусах $^\circ\text{C}$.

Рис. 3. Розподіл температури вздовж стержня

4. Висновки

Використовуючи концепцію комплексних модулів була розв'язана термомеханічна задача про розігрів циліндричного стержня при гармонічних поздовжніх коливаннях в околі першої резонансної частоти. Дану задачу в термінах комплексних амплітуд основних польових змінних розв'язано із застосуванням модифікованого методу скінченних елементів, який узагальнено на випадок амплітудних співвідношень при гармонічному деформуванні. З графіку розподілу температури бачимо, що температура зростає згори донизу та спадає від середини стержня до бічної поверхні. Це зумовлено збільшенням амплітуди деформацій та напружень на даній формі коливань у нижній частині стержня. При амплітуді напруження на верхній поверхні стержня 10^3 Па та температурі зовнішнього середовища 20°C найбільше значення температури досягається в нижній середній точці стержня: $T_{\max} = 29.53^\circ\text{C}$. Таким чином, можемо зробити висновок, що скінченноелементне моделювання дозволяє ефективно розв'язувати термомеханічні задачі про розігрів в'язкопружних тіл з використанням концепції комплексних модулів.

Список використаних джерел

References

1. Green A. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics / A. E. Green. – Oxford: At the Clarendon Press, 1960. – 455 p.
2. Behnke R. Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment / R. Behnke, M. Kalishke – International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – 68. – С. 101–131.
3. Карнаухов В. Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б.П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
4. Карнаухов В. Г. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины / В.Г. Карнаухов, И.К. Сенченков, О.П. Червинко // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 1. – С. 39 – 42.
5. Nashif A. D. Vibration Damping / A. D. Nashif, D. I. Jones, J. P. Henderson – New York: A Wiley-Interscience Publication. – 1985. – 448 p.
6. Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
7. Astarita G. Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity / G. Astarita – Polymer Engineering & Sci. – 1974. – 14, № 10. – С. 730 – 733.
8. Babra R. C. Thermodynamics of simple materials of differential type / R. C. Babra – J. Mech. – 1976. – 15, № 3. – С. 457 – 466.
9. Freakley P. K. Theory and practice of engineering with rubber / P. K. Freakley, A. R. Payne – London: Applied Science Publishers, 1978. – 667 p.
10. Anderson V. W. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials / V. W. Anderson, B. J. Lazan. – Minnesota: Internal rept., Aero Library. – 1957. – 243 p.
11. Goodman J. Mechanics applied to engineering / J. Goodman. – London: Longmans-Green, 1899. – 148 p.
1. GREEN, A. E., ADKINS, J. E. (1960) *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford: At the Clarendon Press.
2. BEHNKE, R. and KALISKE, M. (2015) Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 68. p. 101–131.
3. KARNAUKHOV, V. G., GUMENUK, B. P. (1990) *Termomekhanika predvaritel'no deformirovannykh vyazkoupругikh tel*. Kiev: Naukova dumka.
4. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K., and CHERVINKO, O. P. (1997) *Vliyaniye predvaritel'nogo deformirovaniya na rezonansnyye kolebaniya i disipativnyy razogrev vyazkoupругogo tsilindra konechnoy dliny*. *Applied mechanics*. 33(1). p. 39 – 42.
5. NASHIF, A. D., JONES, D. I., and HENDERSON, J. P. (1985) *Vibration Damping*. New York: A Wiley-Interscience Publication.
6. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K., and CHERVINKO, O. P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkoupругikh tel pri garmonicheskoye nagruzhenii*. Kiev: Naukova dumka.
7. ASTARITA, G. (1974) Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*. 14 (10). p. 730 – 733
8. BABRA, R. C. (1976) Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech*. 15(3). p. 457 – 466.
9. FREAKLEY, P. K. and PAYNE, A. R. (1978) *Theory and practice of engineering with rubber*. – London: Applied Science Publishers.
10. ANDERSON, V. W., LAZAN, B. J. (1957) *Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials*. Minnesota: Internal rept., Aero Library.
11. GOODMAN, J. (1899) *Mechanics applied to engineering*. London: Longmans-Green.

Надійшла до редколегії 29.06.19