УДК 539.3

Плащинська А.В., к.т.н., с.н.с.

**Щодо моделювання розповсюдження
тріщин втомі в тонких ізотропних
пластинах в умовах двовісного
асиметричного розтягу-стиску**

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Alla Plashchynska, Ph.D

**To the modelling of the fatigue cracks
propagation in a thin isotropic plates under
biaxial asymmetric tension-compression**

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P.Nesterov str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто моделювання процесу руйнування від втоми тонких ізотропних нескінченних пластин з тріщинами в умовах зовнішнього двовісного асиметричного циклічного навантаження. Розв'язок задачі побудовано на основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування й механіки неперервного пошкодження, та застосування двох видів критеріїв еквівалентних напружень. Перший – зводить асиметричне циклічне навантаження до еквівалентного за часом до руйнування симетричного циклічного навантаження. Другий – зводить плоский напружений стан в околі вершини тріщини до одновісного. Отримана система рівнянь моделі відносно еквівалентного коефіцієнта інтенсивності напружень дозволяє визначити тривалість інкубаційної стадії та швидкість розповсюдження тріщини втомі в пластинах з різними концентраторами напружень. Побудовано розрахункові залежності довжини тріщини втомі від числа циклів навантаження в нескінченній алюмінієвій пластині з круговим отвором при варіюванні параметрів асиметрії циклу та коефіцієнту двовісності навантаження.

Ключові слова: тріщина втомі, двовісне асиметричне циклічне навантаження, пошкодження.

The modelling of the fatigue fracture process of the thin isotropic infinite plates with cracks under external biaxial asymmetric cyclic loading is considered. The solution of the problem is based on the joint consideration of the fracture mechanics and continuous damage mechanics concepts and using two types of equivalent stress criteria's. The first one reduces an asymmetrical cyclic load to the equivalent symmetric cyclic load in time of the rupture. The second one reduces a plane stress state in the vicinity of the top crack to a single-axial one. The obtained system of equations of the model a relatively equivalent stress intensity factor allows us to determine the duration of the incubation stage and the rate of fatigue crack propagation in plates with different stress concentrators. The calculated dependences of the crack length, which extends from the circular hole, from the number of load cycles in the infinite aluminum plate with a circular hole at the variation of the parameters of the asymmetrical cycle and the coefficient of the biaxiality loading are constructed.

Key words: fatigue crack, biaxial asymmetric cyclic loading, damage.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Прогнозування термінів безпечної експлуатації елементів конструкцій, які знаходяться в умовах багатовісного циклічного навантаження, є актуальною задачею. Один зі шляхів її вирішення

полягає в побудові теоретичної моделі розповсюдження тріщини втомі на основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування, неперервного пошкодження [1] та критеріїв еквівалентності напружень [2,3].

1. Об'єкт дослідження. Постановка задачі

Розглянемо процес розповсюдження тріщини довжиною 2ℓ в тонкій нескінченній ізотропній пластині (фіг. 1) при зовнішньому двовісному

Фіг. 1 Нескінченна пластина з тріщиною при двовісному розтягу-стиску

асиметричному циклічному навантаженні

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n) \\ (\sigma_{max})_{ij} = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} < \sigma_Y \end{cases}, \quad (1.1)$$

де $i = j = 1, 2$ ($x = 1, y = 2$), $(\sigma_{max})_{ij}$, $(\sigma_m)_{ij}$, $(\sigma_a)_{ij}$ – максимальні, середні та амплітуди циклічних напружень, відповідно; σ_Y – межа течії.

Застосовуючи концепцію еквівалентних напружень [2], які дозволяють звести асиметричні цикли навантажень по кожній з координатних осей до еквівалентних за кількістю циклів до руйнування n_R симетричних циклів, умови навантаження (1.1) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_{a,eqv})_{ij} \sin(2\pi n) & i = j = 1, 2 \\ \max((\sigma_{a,eqv})_{ij}) < \sigma_Y \end{cases} \quad (1.2)$$

де еквівалентні напруження $(\sigma_{a,eqv})_{ij}$ за аналогією з наведеною в [2] структурою, задаються співвідношенням

$$(\sigma_{a,eqv})_{ij} = \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{ij}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{ij}, \quad (1.3)$$

де σ_B – межа міцності матеріалу пластини при розтягу; η коефіцієнт чутливості матеріалу пластини до асиметрії циклу навантаження при одновісному розтягу-стиску.

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= K_I(\ell(n)) = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi \ell(n)} [(1 + \xi) - (1 - \xi) \cos 2\alpha] \\ \Delta K_{II} &= K_{II}(\ell(n)) = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi \ell(n)} (1 - \xi) \sin 2\alpha \end{aligned}, \quad (2.5)$$

Тріщину втоми розглядаємо як вузьку гострокінцеву щілину розташовану вздовж осі OX . При циклічному навантаженні, згідно моделі Райса [4], в околі тріщини формуються дві пластичні зони – монотонна та циклічна. Вважаємо, що розповсюдження тріщини здійснюється стрибками на довжину циклічної пластичної зони вздовж осі OX , а накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ відбувається у півциклах розтягу.

Метою дослідження є побудова двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми при двовісному розтягу-стиску.

2. Двостадійна модель розповсюдження тріщини втоми при двовісному розтягу-стиску

Запишемо еволюційне рівняння кінетики накопичення пошкоджень внаслідок втоми при двовісному циклічному навантаженні

$$\frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \sigma_{eqv}(x, n))^q}{1 - \omega(x, n)} \right] \quad (2.1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \max\{\omega[\ell_0 + \lambda(\ell_0), \theta, n]\} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max\{\omega[\ell(n) + \lambda(\ell(n)), \theta, n]\} = 1; & 0 \leq n \leq n_* \end{cases}, \quad (2.2)$$

де n_* – тривалість інкубаційної стадії; еквівалентне напруження в околі вершини тріщини

$$\Delta \sigma_{eqv}(x, n) = \frac{\Delta K_{eqv}(\ell(n))}{\sqrt{2\pi(x - \ell(n))}} \quad (2.3)$$

отримане за критерієм еквівалентних напружень [3]

$$\Delta K_{eqv}(\ell(n)) = (\Delta K_I^4(\ell(n)) + 8 \Delta K_{II}^4(\ell(n)))^{1/4}, \quad (2.4)$$

який зводить плоский напружений стан до одновісного

Співвідношення для розмахів коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини при плоскому напруженому стані [5] мають вид

де α – кут нахилу тріщини до осі OY ;
 $\xi = (\sigma_{a,eqv})_{xx} / (\sigma_{a,eqv})_{yy}$ – коефіцієнт двовісності
навантаження.

Довжину циклічної пластичної зони
визначаємо з виразу [4]

$$\lambda(\ell(n)) = \frac{\pi}{8} \left[\frac{\Delta K_{eqv}(\ell(n))}{4\sigma_Y} \right]^2 \quad (2.6)$$

Інтегруючи рівняння (2.1) з врахуванням
граничних умов (2.2) отримуємо рівняння руху
фронтів тріщини втомі у вигляді нелінійного
інтегрального рівняння Вольтера I роду

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = \\ = (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

За методикою розв'язку, викладеного в [1,2],
отримуємо систему визначальних рівнянь
двостадійної моделі розповсюдження тріщини

втомі при двовісному асиметричному розтягу-
стиску у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \left(\frac{4\sigma_Y}{\pi} \right)^{q-2} \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{yy}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-2\eta} (\sigma_a)_{yy}^2 \ell(n) \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y} \right)^q \end{cases} \quad (2.8)$$

де D, q – коефіцієнти, що характеризують
інтенсивність накопичення пошкоджень
внаслідок втомі й визначаються зі стандартних
іспитів на втому гладких циліндричних зразків
при одновісному симетричному багатоцикловому
розтягу-стиску.

Систему (2.8) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \frac{(4\sigma_Y)^{q-2}}{(\pi)^{q-1}} [\Delta K_{eqv}(\ell(n))]^2 \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y} \right)^q, \end{cases} \quad (2.9)$$

який дає можливість застосувати модель до
пластин з концентраторами напружень різної
геометричної форми.

3. Рішення задач

Розглянемо нескінченну тонку ізотропну
пластину (фіг.2) з концентратором напружень у
вигляді кругового отвору радіуса $r = 25,4 \cdot 10^{-3}$ м та

Фіг. 2 Нескінченна пластина з круговим
отвором й тріщинами при двовісному
розтягу-стиску

двома симетричними тріщинами довжиною
 $\ell_0 = 2,54 \cdot 10^{-3}$ м вздовж осі OX , що виходять з
контуру отвору. Пластина знаходиться в умовах
двовісного асиметричного багатоциклового
розтягу-стиску (1.1).

Побудуємо залежності довжини тріщини від
кількості циклів навантаження з застосуванням
(2.9) та співвідношення для ΔK_{eqv} у вигляді [6]

$$\Delta K_{eqv} = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi r} \sqrt{\frac{1-\delta^4}{4\delta}} \left\{ (1+\zeta) - (1-\zeta) \left[4 \left(\frac{1}{1+\delta^2} - 1 \right) - \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad \delta(n) = \left(1 + \frac{\ell(n)}{r} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

На фіг. 2 наведені результати розрахунків залежності довжини тріщини $(r + \ell)$ від кількості циклів навантаження n в пластині з алюмінієвого сплаву 2024-T3 в залежності від

а

коефіцієнту двовісності навантаження ζ (фіг. 2а) при $(\sigma_{a,eqv})_{yy} = 69$ МПа та від коефіцієнтів асиметрії циклу R_x, R_y (фіг. 2б)

б

Фіг. 2 Залежність $(r + \ell)$ від кількості циклів навантаження n при варіюванні: а – $\zeta = 0$ (1), $\zeta = 1$ (2), $\zeta = 2$ (3); б – $R_x = R_y = -1$, (1); $R_x = R_y = 0$, (2); $R_x = R_y = 0,2$, (3); $R_x = R_y = 0,33$, (4)

Результати розрахунків за системою рівнянь (2.9) свідчать, що зі збільшенням коефіцієнту двовісності навантаження ζ спостерігається незначне, біля 10%, зменшення швидкості розповсюдження тріщин втоми при однаковій

кількості циклів навантаження, а зі збільшенням коефіцієнтів асиметрії циклу R_x, R_y – швидкість розповсюдження тріщин зростає.

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении / В.П.Голуб, А.В.Плещинская // Прикл. механика.- 1994.- 30, №7.- С. 53-63.
2. Голуб В.П. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений / В.П.Голуб, В.Н.Пелых, А.Д.Погребняк // Вісник НТУУ «КПІ». Машинобудування.- 2010, №58.- С. 177-182.
3. Tanaka K. Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis // Eng. Fract. Mech.- 1974.- N6.- P. 493-507.
4. Rice J.R. Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue // ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation.- 1967.- P. 247-309.
5. Eftis J. The inclined crack under biaxial load / J.Eftis, N.Subramonian // Eng. Fract. Mech.- 1978, 10.- P. 43-67
6. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий / А. А. Каминский. – Киев: Наукова думка, 1982. – 160 с.

References

1. GOLUB, V.P. and PLASHCHYNSKA, A.V. (1994) Model` ustalostnogo razrusheniya tonkikh izotropnykh plastin s treshchinamy pri osevom nagruzhennii *Prikl. Mehkanika*. 30(7). p. 53-63.
2. GOLUB, V.P., PELYKH, V.N. and POGREBNIYAK, A.D. (2010) Prognostirovanie ustalostnoj dolgovechnosti prizmaticheskikh metallicheskih sterzhnej pri asimmetrichnom rastyazhenii-szhatii metodom ekvivalentnykh napryazheniy. *Visnyk NTUU «KPI». Mashynobuduvannya*. 58. p. 177-182.
3. TANAKA, K. (1974) Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Eng. Fract. Mech*. 6. p. 493-507.
4. RICE, J.R. (1967) Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. ASTM STP 415, *Fatigue Crack Propagation*.
5. EFTIS, J. and SUBRAMONIAN, N. (1978) The inclined crack under biaxial load. *Eng. Fract. Mech*. 10. p.43-67.
6. KAMINSKYJ, A.A. (1982) *Khrupkoe razrushenie vblizi otverstij*. Kyiv: Naukova dumka

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 20.05.2019