УДК 539.3

Ревенко В. П., д.ф.-м.н., пров.н.с.

**Розрахунок методом скінченних тіл
плоского напруженого стану
прямокутної пластини
із прямокутним отвором**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79601, м. Львів, вул. Наукова 3б,
e-mail: victorrev@ukr.net

V. P. Revenko, Dr.Sci. (Phys.-Math.).

**Method of finite bodies for determination of
the plane stressed state of rectangular plates
with a rectangular hole**

Pistryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 3-b,
Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine
e-mail: victorrev@ukr.net

Запропоновано аналітично-числовий метод скінченних тіл для розрахунку напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором. Метод ґрунтується на умовному розділенні двозв'язної поверхні пластини на прямокутні області, апроксимації її напруженого стану скінченною сумою визначальних функцій і запропонованому способі зведення задоволення всіх умов ідеального контакту прямокутних частин пластини і крайових умов до мінімізації узагальненої квадратичної форми. Встановлено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

Ключові слова: пластина, прямокутний отвір, метод скінченних тіл.

The paper is devoted to the determination of the stress-deformed state of structurally heterogeneous bearing rectangular plates with a rectangular hole. The new analytical-numerical method (finite bodies) was used, to find the stress state of the plate with a hole. The method of finite bodies uses the conditional partition of the doubly-connected surface of the plate into simpler connected rectangular parts. On the lines of conditional contact, the conditions of ideal contact are taken into account, which ensure the equality of stresses, deformations and displacements. The perturbed stressed state, which is presented in the form of a series of functions, which is rapidly intercepted at a distance from the outline of the hole, is considered. A finite sum of solutions of a plane problem is used and the stress state of a perturbed state is given as a sum of a series for nonorthogonal functions. The components of vector of displacements and stresses are written. The determination of the coefficients of the sum of a series is based on the proposed method of satisfying all boundary conditions and the conditions of ideal contact to find the minimum of a generalized quadratic form. The numerical criterion for the convergence of the method is theoretically established. It is shown that the accuracy of satisfaction of boundary conditions and conditions of ideal contact is estimated by one number – the minimum of a generalized quadratic form.

Key Words: plate, rectangular hole, method finite bodies.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Розрахунок плоского напруженого стану нескінченних пластин із гладким отвором присвячені роботи [1, 2], де запропоновані аналітичні методи на основі конформних відображень теорії функцій комплексного змінного. Використання цих методів до розрахунку нескінченної площини з прямокутним отвором приводить до появи

особливостей в напруженнях у кутових точках отвору.

Метою статті є подальша розробка нового аналітично-числового методу скінченних тіл [3] до розрахунку плоского напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором, а також обґрунтування відсутності особливостей в напруженнях у кутових точках отвору за коректних навантажень пластини.

2. Постановка задачі

Розглянемо пластину сталої товщини h , серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$ з прямокутним отвором $\Pi_1 = \{(x, y) \in [-a_1, a_1] \times [-b_1, b_1]\}$.

В [4] на основі використання загального розв'язку рівнянь Ляме знайдено аналітичний вираз переміщень

$$\begin{aligned} u &= -(1+\nu) \left\{ y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right\} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v &= -(1+\nu) \left[y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] + (1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

і напружень

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \Phi &= E \left(y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

плоскої задачі теорії пружності, де Φ , Ψ – гармонічні функції переміщень, ν – коефіцієнт Пуассона.

Рис. 1. Схема умовного поділу пластини на прямокутні частини.

Для простоти викладу методу скінченних тіл припустимо, що пластину розтягують постійними навантаженнями σ_0 вздовж осі Оу, а контур отвору Π_1 не навантажений (рис. 1). Слідуючи працям [3, 5], двозв'язну поверхню пластини умовно розділимо на вісім

прямокутних частин. Для цього проведемо із кутів отвору умовні розрізи паралельні осям координат, на яких мають виконуватися умови ідеального контакту. Контур отвору Π_1 буде розділений на чотири відрізки. Внаслідок симетрії задачі достатньо розглянути перший квадрант, в якому буде два умовних розрізи, що виділяють три прямокутні області: $S_1 \in [-a_1, a_1] \times [b_1, b]$, яка містить частину контуру отвору, який позначимо Π_1^1 , де $x \in [-a_1, a_1]$; $S_2 \in [a_1, a] \times [-b_1, b_1]$ – край отвору Π_1^2 , де $y \in [-b_1, b_1]$; $S_3 \in [a_1, a] \times [b_1, b]$, границя якої містить умовний розріз L_1 між областями S_1 і S_3 , який позначимо L_1 і L_2 – між областями S_2 і S_3 .

Напружено-деформовані стани прямокутних частин пластини розділимо на дві складові: відомий основний напружений стан і збурений, який виникає внаслідок наявності отвору Π_1 .

Збурені напружені стани швидко зникають при віддаленні від країв Π_1^1 , Π_1^2 отвору. Покладемо $a, b \gg a_1, b_1$, так щоб збуреним станом на зовнішньому контурі Π можна було знехтувати. Для визначення збуреного стану достатньо розглянути крайові умови на відрізках Π_1^1 , Π_1^2 і умови ідеального контакту на відрізках L_1 , L_2 .

Слідуючи роботам [3, 5], подамо шукані функції переміщень збурених станів: в області S_1

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 \exp[-k\omega_1(y-b_1)] \sin k\omega_1 x, \\ \psi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 \exp[-k\omega_1(y-b_1)] \cos k\omega_1 x, \end{aligned} \quad (3)$$

в області S_2

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \exp[-k\omega_2(x-a_1)] \sin k\omega_2 y, \\ \psi_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \exp[-k\omega_2(x-a_1)] \cos k\omega_2 y, \end{aligned} \quad (4)$$

в області S_3

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k^3 \exp[-k\omega_3(y-b_1)] \sin k\omega_3 x + \\ &+ a_k^4 \exp[-k\omega_4(x-a_1)] \sin k\omega_4 y \}, \end{aligned}$$

$$\psi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \{b_k^3 \exp[-k\omega_3(y-b_1)] \cos k\omega_3 x + b_k^4 \exp[-k\omega_4(x-a_1)] \cos k\omega_4 y, \quad (5)$$

де $\omega_1 = k_1/b_1$, $\omega_2 = k_1/a_1$, $\omega_3 = 2k_1/(a-a_1)$, $\omega_4 = 2k_1/(b-b_1)$, $2,8 < k_1 < \pi$, вибір параметра k_1 дозволяє поліпшити збіжність обчислень.

3. Методика одночасного задоволення всіх крайових умов і умов ідеального контакту

Виразимо крайові умови на відрізках контуру отвору Π_1^1 , Π_1^2

$$\sigma_y^1 = \sigma_0, \quad \tau_{xy}^1 = 0, \quad x \in [\beta_1, \alpha_1], \quad y = b_1, \quad (6)$$

$$\sigma_x^2 = 0, \quad \tau_{xy}^2 = 0, \quad y \in [\beta_2, \alpha_2], \quad x = a_1. \quad (7)$$

Умови ідеального контакту на відрізках L_1 , L_2

$$\sigma_x^1 = \sigma_x^3, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^3, \quad u^1 = u^3, \quad v^1 = v^3, \quad y \in [\beta_3, \alpha_3], \quad (8)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_y^3, \quad \tau_{xy}^2 = \tau_{xy}^3, \quad u^2 = u^3, \quad v^2 = v^3, \quad x \in [\beta_4, \alpha_4], \quad (9)$$

де

$$\beta_1 = -a_1, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \beta_2 = -b_1, \quad \alpha_2 = b_1, \quad \beta_3 = b_1, \quad \alpha_3 = b, \quad \beta_4 = a_1, \quad \alpha_4 = a.$$

При аналітично-числовому задоволенні умов (6)–(9) обмежимося в рядах (3)–(5) першими N членами ряду щодо індексу k , де $N \square$ задане натуральне число. Внесемо одержані функції ϕ_j , ψ_j у подання (1)–(2) і знайдемо вирази переміщень і напружень в областях S_j , $j = \overline{1,3}$.

Після підстановки їх в умови (6)–(8), одержимо систему дванадцяти рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m, \quad m = \overline{1, K}, \quad (10)$$

де

$$\gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad K = 12, \quad M = 8N, \quad c_{k+M_1} = a_k^j, \quad c_{k+N+M_1} = b_k^j, \quad M_1 = 2(j-1)N, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad P_m = \sigma_0 \delta_m^1, \quad A_{m,k}(\gamma_m) - \text{відомі функції.}$$

Для задоволення системи рівнянь (10) використовуємо аналітично-числовий метод [3, 5]. Запропонована там методика дозволяє числовий розв'язок системи рівнянь (10) звести

до знаходження мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\sum_{m=1}^K \left\| \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \quad (11)$$

де

$$\|f\|_m = \sqrt{\int_{\beta_m}^{\alpha_m} f^2(\gamma) d\gamma} - \text{норма в } L_2[\beta_m, \alpha_m].$$

За визначенням узагальнена квадратична форма (11) невід'ємна. Мінімум її для заданого N позначимо $F(N)$, а невідомі c_k , на яких він досягається, — c_k^N . Невідомі c_k^N визначимо з умови мінімуму узагальненої квадратичної форми (11). Базові функції частин пластини (3)–(5), що визначаються знайденими коефіцієнтами c_k^N , позначимо $\phi_j^N(x, y)$, $\psi_j^N(x, y)$.

4. Знаходження числових критеріїв збіжності побудованого розв'язку

Лема [3]. Функція $F(N)$ невід'ємна і не зростає.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то переміщення і напруження, виражені через функції $\phi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_j^N$, $\psi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_j^N$, будуть точно задовольняти умови (10) у метриках $L_2[\beta_m, \alpha_m]$.

Відзначимо, що квадратична форма (11) означена таким чином, що для її мінімуму $F(N)$ і знайдених невідомих c_k^N виконується рівність

$$F(N) = \sum_{m=1}^K \left\| \sum_{k=1}^M c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2,$$

яка дає оцінку точності задоволення умов (10)

$$F(N) > \left\| \sum_{k=1}^M c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2, \quad m = \overline{1, K}.$$

Обговорення результатів. Числовими розрахунками встановлено, що процес одночасного задоволення рядами Фур'є всіх крайових умов на контурах Π і Π_1 двозв'язної поверхні пластини є нестійким. Це пояснюється

тим, що в подання розв'язку плоскої задачі (див. (3)–(5)) входять експоненціальні функції, показники яких лінійно зростають або спадають зі збільшенням N . Всі ці функції не можна (без умовного розрізання пластини з отвором на частини) нормувати так, щоб вони не зростали на деяких сторонах пластини, або отвору. У роботах [5, 6] показано, що обчислювальний процес побудови методом рядів Фур'є розв'язку крайової задачі в прямокутній пластині є стійкий, оскільки експоненціальні функції можна нормувати так, що вони будуть рівні одиниці на заданих сторонах прямокутника і зменшуватися при віддаленні від них.

Контур отвору розділений на чотири відрізки, на яких всі точки будуть знаходитись під дією обмежених навантажень. Згідно результатів робіт [5, 6], у випадку коректних навантажень, при розрахунку запропонованим методом

прямокутних пластин з отвором будуть відсутності особливості в напруженнях.

Висновки. Обґрунтовано метод скінченних тіл, заснований на умовному поділі пластини з прямокутним отвором на прямокутні частини, на краях яких експоненціальні функції нормовані одиницею. Це дозволить побудувати стійкий алгоритм розв'язання граничної задачі. Розроблено підхід, який дозволив одночасно враховувати велику кількість граничних і контактних умов як в зусиллях, так і в переміщеннях, заданих на різних краях як пластини, так і отвору. Запропоновано метод, який узагальнює відоме розкладання Фур'є для одного рівняння на випадок розв'язування системи рівнянь з неортогональними коефіцієнтами. Встановлено критерії, при яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

Список використаних джерел

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
3. Revenko V.P. Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole / V.P. Revenko, V.N. Bakulin// Russian Mathematics. – 2016. – № 6. – P. 1–11.
4. Revenko V.P. Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity / V.P. Revenko, A.V. Revenko // Materials Science. – 2017. – Vol. 52, No 6. – P. 811–818.
5. Revenko V.P. Application of the least-squares method to the analysis of displacements and stresses in the two-dimensional problem / V.P. Revenko// Materials Science. – 2008, – 44, №4, P. 482–488.
6. Meleshko V. V. Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem / V. V. Meleshko // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, № 1. P. – 33–85.

References

1. MUSHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryye osnovnyye zadachi matematizeskoj teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
2. SAVY'N, G. (1968) *Raspredelenie napryazhenij okolo otverstiy*. Kiev: Naukova dumka.
3. REVENKO, V.P. and BAKULIN, V.N. (2016) Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole. *Russian Mathematics*. No 6. p. 1–11.
4. REVENKO, V.P. and REVENKO, A.V. (2014) Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity. *Materials Science*. (52)6. p. 811–818.
5. REVENKO, V.P. (2008) Application of the least-squares method to the analysis of displacements and stresses in the two-dimensional problem. *Materials Science*. (44)4. p. 482–488.
6. MELESHKO, V. V. (2003) Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.* (56)1. p. 33–85.

Надійшла до редколегії 20.06.19