УДК 519.9

Романов О. В.¹, к.т.н., с.н.с.
Фернаті П.В.², к.т.н., с.н.с..

**До питання врахування впливу третього
інваріанту девіатора напружень на процес
довготривалого деформування нелінійно-
в'язкопружних матеріалів**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ²creep@inmech.kiev.ua

Romanov A. V.¹, Ph. D.,
Fernati P. V.², Ph. D.,

**To the problem of influence of the third
invariant of stress deviator on the process of long-
term deformation of nonlinear viscoelastic
materials**

¹ National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail: ²creep@inmech.kiev.ua

Розглядається питання врахування впливу виду напруженого стану на процес довготривалого деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов простих та близьких до простих режимів навантаження, що здійснюється шляхом введення у визначальні рівняння функції з параметром кута виду напруженого стану. Ця функція визначається на основі аналізу базових експериментальних даних, що отримані з базових дослідів на одновісний розтяг та чисте скручення. Фізико-механічні властивості нелінійно-в'язкопружного середовища задаються залежностями між інваріантами тензорів деформації і напружень у формі модифікованої нелінійної моделі в'язкопружності Работнова. Ядро спадковості використовується у вигляді дробово-експоненційної функції. Отримані визначальні рівняння апробуються експериментально на задачах розрахунку нелінійних деформацій повзучості при комбінованому навантаженні тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену високої щільності і поліетилену низького тиску. Співставлення розрахунків із експериментальними даними показало, що врахування виду напруженого стану якісно і кількісно покращує їх узгодження.

Ключові слова: нелінійно-в'язкопружний матеріал, розтяг з крученням, деформація повзучості, кут виду напруженого стану.

The problem on the influence of stressed state on the process of long-term deformation of nonlinear viscoelastic materials under the simple and quasi-simple modes of loading by introduction of the function with the parameter of Lode angle into the defining equations is considered. The mentioned function is determined by analysis of base experimental data obtained from the base experiments on axial tension and pure torsion. Physical and mechanical properties of nonlinear viscoelastic solids are defined by the correspondence between the invariants of deformation tensors and tensions according to the modified nonlinear Rabotnov's model for viscoelasticity. The heredity kernels are given by the fractional-exponential function. The constructed defining equations are verified experimentally for the problems of determination of nonlinear creep deformations under combined loading applied to the thin-walled tubular elements made of polyethylene of high density and low pressure polyethylene. As a result of juxtaposition of experimental data and calculations it is stated that allowing for the type of stressed state improves their agreement qualitatively and quantitatively.

Key words: nonlinear viscoelastic materials, tension with torsion, creep strains, Lode angle.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Елементи конструкцій енергетичного устаткування працюють, як правило, в умовах складного напруженого стану і піддаються дії комплексу термомеханічного навантаження. В цих умовах на процес повзучості впливає безліч факторів, як фізико-механічні властивості самого

матеріалу, температура експлуатації, режим навантаження, так і вид напруженого стану, який в свою чергу визначається тензором напруження.

Одним із шляхів побудови визначальних рівнянь для розрахунку деформацій повзучості в умовах складного напруженого стану за умов

простих і близьких до простих режимах навантаження є узагальнення на складний напружений стан одновимірних рівнянь повзучості. Узагальнення виконується виходячи з тензорно-лінійного зв'язку між тензором напруження та деформації у вигляді пропорційності їх девіаторів

$$e_{ij}(t) = \lambda(\cdot) s_{ij}(t), \quad (1)$$

де коефіцієнт пропорційності відображає як фізико-механічні властивості середовища, так і її реакцію на силову дію і в загальному випадку може залежати від трьох інваріантів тензора напружень, температури і т.д..

При розв'язку практичних задач часто застосовується підхід, якій базується на гіпотезі існування єдиної кривої деформування матеріалу що враховує вплив тільки другого інваріанту напружень. Слід, зазначити, що в разі короточасного активного навантаження, вона в багатьох випадках задовільно або навіть добре узгоджується з експериментом як для металевих [1,2], так і полімерних матеріалів [3,4,5] навіть інколи і для непростих видів навантаження, а у випадку довготривалого навантаження, в більшості дослідів для вказаних вище матеріалів вона не підтверджується [4,5].

1. Постановка задачі, об'єкт дослідження

В роботі процес повзучості розглядається при ізотермічному режимі навантаження, а також вважається, що на кінетику деформування сферова компонента суттєво не впливає [6]. З врахуванням цих допущень для коефіцієнта пропорційності в (1) маємо

$$\lambda(\cdot) = \lambda \{ J_2 [D_\sigma(t)], J_3 [D_\sigma(t)] \}, \quad (2)$$

де, передбачається врахування впливу як другого так і третього інваріантів девіатора напружень, якій визначає форму девіатора напружень і характеризується кутом виду напруженого стану в інтерпретації [7].

Вплив третього інваріанту девіатора напружень враховується за допомогою функції кута виду напруженого стану $\gamma(\psi_\sigma)$, в якій параметр кута виду напруженого стану ψ_σ розглядається у вигляді

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27 J_3(D_\sigma)}{2 \sigma_i^3}. \quad (3)$$

В (2),(3) прийнято $J_2[D_\sigma(t)]$, $J_3[D_\sigma(t)]$ – другий і третій інваріанти девіатора напружень

відповідно; σ_i – інтенсивність нормальних напружень; ψ_σ – кут виду напруженого стану, графічна інтерпретація якого (рис. 1) показує орієнтацію октаедричного дотичного напруження

Рис. 1

τ_n в октаедричній площині ABC відносно проєкції AO' на цю площину осі максимального головного напруження σ_1 .

В цій інтерпретації одновісному розтягу відповідає $\psi_\sigma = 0$, одновісному стиску $\psi_\sigma = \pi/3$, а чистому скрученню $\psi_\sigma = \pi/6$.

Залежність між девіаторами деформацій і напружень (1) з врахуванням (2) приймає вигляд

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i [\sigma_i(t), t, \gamma(\psi_\sigma)]}{\sigma_i(t)} s_{ij}(t), \quad (4)$$

де $\varepsilon_i(\cdot)$ – інтенсивність деформацій.

Визначення залежностей функції $\gamma(\psi_\sigma)$ від ψ_σ здійснюється на основі базових дослідів на одновісний розтяг $-\bar{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ та чисте скручення $-\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ за формулою

$$\gamma(\psi_\sigma) = 1 - 6\psi_\sigma \{ [1 - \tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t) / \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)] \} / \pi. \quad (5)$$

Система визначальних рівнянь з врахуванням $(\varepsilon_v \neq 0)$ і (4), (5) записується у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{3}{2} \frac{[\pi \pm 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi_\sigma] \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}{\pi \sigma_i(t)} \times \\ &\quad \times (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t); \\ \varphi_i(\bar{\varepsilon}_i(t)) &= \sigma_i(t) - \gamma_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \gamma_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

де $\varphi_v(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ – функції, які задають не

лінійність об'ємних і зсувних в'язкопружних властивостей; $\varepsilon_V(\cdot)$ – об'ємна деформація; $K_V(\cdot)$, $K_i(\cdot)$ – функції, які задають ядра об'ємної і зсувної повзучості, задаються дробово-експоненційними функціями [9]; λ_V , λ_i – реологічні параметри.

Фізико-механічні властивості ізотропних нелінійно-в'язкопружних середовищ задаються залежностями між інваріантами деформацій і напружень в формі модифікованої нелінійної моделі в'язкопружності Работнова [8].

2. Експериментальна апробація.

Розв'язуються задачі розрахунку деформацій

подовжньої і зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП і поліетилену низького тиску в умовах одновісного розтягу, чистого скручення і комбінованого навантаження розтягом із скрученням з урахуванням впливу виду напруженого стану.

Експериментальні дані, які використані для визначення матеріальних констант і для апробації результатів розрахунків, запозичені з робіт [4,5].

Для розрахунку деформацій повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ і $\varepsilon_{21}(t)$ за умов, коли $\sigma_{11} = \text{const}$ і $\tau_{12} = \text{const}$, з (6) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi\sigma]}{\pi\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_V)^{(1+n)(1+\alpha_V)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_V)]} \right] \right\}^k,$$

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi\sigma]}{\pi\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k \quad (8)$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11}$.

Результати розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП і поліетилену низького тиску в умовах комбінованого навантаження одновісним розтягом і скрученням ($\sigma_{11} \neq 0$,

$\tau_{21} \neq 0$), які виконані за рівняннями (7) і (8), співставленні на рис. 2.1 з експериментальними даними. Роракунки за рівняннями (7) і (8) нанесені штрих пунктирними лініями, а штриховими лініями нанесені результати розрахунків за рівняннями (7) і (8), в яких вплив виду напруженого стану не враховувався.

а

б

Рис. 2.1. Деформації повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП за умов комбінованого навантаження (1- $\sigma_{11} = 1,77$, $\tau_{21} = 0,83$; 2- $\sigma_{11} = 3,54$, $\tau_{21} = 1,66$; 3- $\sigma_{11} = 5,31$, $\tau_{21} = 2,49$; 4- $\sigma_{11} = 7,08$, $\tau_{21} = 3,32$ МПа)

ВИСНОВОК

В статті запропоновано підхід до побудови визначальних рівнянь повзучості нелінійно-в'язкопружних середовищ за умов простих та

близьких до простих режимів навантаження, що враховують вплив виду напруженого стану. Вважається, що за цих умов навантаження деформування відбувається по траєкторії малої

кривизни, а девіатор деформацій пропорційний девіатору напружень. Врахування залежності деформування від виду напруженого стану у визначальних рівняннях, здійснюється за допомогою функції з параметром кута виду напруженого стану.

Співставлення результатів розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчатих

елементів з поліетилену при комбінованому навантаженні розтягом із скрученням показали, що врахування виду напруженого стану якісно і кількісно покращує узгодження з результатами експерименту в зрівнянні розрахунками без його врахування, що дозволяє зробити висновок про обґрунтованість даного підходу до побудови визначальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Дэвис Е. Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии / Теория пластичности. / М.: Изд. иностр. лит., 1948, -с. 364-374.
2. Жуков А. М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов / Изв. АН СССР, Отд. техн. наук. – 1955, № 8.
3. Баев Л.В. Исследование ползучести органического стекла (полиметил-метакрилата) при совместном действии растяжения с кручением / Л.В. Баев, Н.И.Малинин // Механика полимеров. – 1966, №5. – С. 671-677.
4. Васков Б. С. Некоторые вопросы ползучести полиэтиленовых труб // Прочность материалов и конструкций. Труды ЛПИ. № 278. – Л: Машиностроение, 1967. – С. 13-19.
5. Креггерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф Креггерс., М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985, №2. – С. 195-201.
6. Наместников В.С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957, №4. – С. 141-145.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
8. Голуб В. П. Нелинейная ползучесть вязкоупругих органических волокон при растяжении / В. П. Голуб, Ю. М. Кобзарь, П. В Фернати // Прикл. механика.-2005.- Том 41, №7
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

References

1. DEVIS E. (1948) Tekuchest i razrushenie stali so srednim soderzhaniam ugleroda pri slozhnom napryazhennom sostoyanii *Teoriya plastichnosti* Moskva: Izd. Inostr. Lit. p. 364-374.
2. ZHUKOV A. M. (1955) Slozhnoe nagruzhenie i teoriya plastichnosti izotropnyih metallov in *Izv. AN SSSR, Otd. tehn. nauk.* № 8.
3. BAEV L.V., MALININ N.I. (1966) Issledovanie polzuchesti organicheskogo stekla (polimetilmetakrilata) pri sovmestnom deystvii rastyazheniya s krucheniem *Mehanika polimerov.* № 5. – p. 671-677.
4. VASKOV B. S. (1967) Nekotoryie voprosy polzuchesti polietilenovyih trub. *Prochnost materialov i konstruktsiy. Trudy LPI.* № 278. – L: Mashinostroenie,. – p. 13-19.
5. KREGERS A.F., KILEVICH M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyisokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mehanika kompozitnyih materialov,* №2. – pp. 195-201.
6. NAMESTNIKOV V.S. (1957) O polzuchesti pri postoyannyih nagruzkah v usloviyah slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya. *Izv. AN SSSR. Otd. tehn. Nauk* №4. – pp. 141-145.
7. MALININ N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti.* Moskva: Mashinostroenie.
8. GOLUB V. P., KOBZAR Yu. M., FERNATI P. V. (2005) Nelineynaya polzuchest vyazkouprugih organicheskikh volokon pri rastyazhenii *Prikl. mehanika.*-Tom 41, №7
9. RABOTNOV Yu.N. (1966) *Polzuchest elementov konstruktsiy.* Moskva: Nauka,

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 17.05.19