УДК 532.5

Розумнюк В.І., к.ф.-м.н., с.н.с.

Про загальні розв'язки рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4е;
e-mail:vyach1@ukr.net

V.I. Rozumniuk, PhD

About general solutions of Euler's and Navier- Stokes equations

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e;
e-mail:vyach1@ukr.net

Побудова загального **розв'язку** рівняння Нав'є-Стокса є фундаментальною проблемою сучасної механіки рідини та математики через нелінійність, що виникає при переході до змінних Ейлера. Запропоновано нову процедуру переходу без появи в рівнянні нелінійних доданків, що дає можливість побудувати **загальний розв'язок** рівняння Нав'є-Стокса як поєднання загальних розв'язків рівнянь Лапласа та дифузії. Існування, унікальність та гладкість **розв'язків** рівнянь Нав'є-Стокса та Ейлера з'ясовуються при дослідженні **розв'язків** рівнянь Лапласа та дифузії, які добре вивчені.

Ключові слова: рівняння Ейлера і Нав'є-Стокса, загальні розв'язки.

Constructing a general solution to the Navier-Stokes equation is a fundamental problem of current fluid mechanics and mathematics due to nonlinearity occurring when moving to Euler's variables. A new transition procedure is proposed without appearing nonlinear terms in the equation, which makes it possible constructing a general solution to the Navier-Stokes equation as a combination of general solutions to Laplace's and diffusion equations. Existence, uniqueness, and smoothness of the solutions to Euler's and Navier-Stokes equations are found out with investigating solutions to the Laplace and diffusion equations well-studied.

Key Words: Euler's and Navier-Stokes equations, general solutions

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Математичний опис в'язкого стисливого континууму в русі, як відомо, є теоретичною основою дослідження рухомого середовища.

Залишаючи загальний аналіз для подальшого, розглядаємо особливий і надзвичайно важливий випадок нестисливого в'язкого континууму, тобто, в'язкої рідини.

Ми знаємо, що рівняння Нав'є-Стокса описує цей процес [1,2,3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\nabla \times \bar{u}) \times u = -\nabla H + \nu \Delta u \quad (1)$$

що разом із умовою нестисливості

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (2)$$

визначає рух рідини [1,2,3]. Тут $\bar{u}$ – швидкість елементарного об'єму, що містить достатньо багато матеріальних частинок (точок), ν – кінематична в'язкість, ∇H – сума потенційних сил, прикладених до елементарного об'єму.

У проблемах механіки рідини

$$\nabla H = \nabla \Psi + \nabla \frac{p}{\rho}, \quad (3)$$

де $\nabla \Psi$ – деяка задана сила на одиницю маси (якщо така є), p – гідродинамічний тиск, ρ – густина.

Про нелінійність

Ліва частина (1), що містить нелінійні доданки, розглядається як визначальна перешкода для побудови загального рішення. Більше того, зараз ще не доведено існування (чи ні) такого рішення. Отже, необхідно шукати інший підхід для вирішення проблеми.

Звідси можна стверджувати, що лише більш глибокий аналіз фізичних аспектів рівняння здатний дати шанс вирішити цю проблему; тому рівняння (1) розглядається нижче, перш за все, як опис руху рідини, а не формальне диференціальне рівняння.

Щоб з'ясувати напрямок нашого дослідження, було проведено аналіз фізичного змісту підходу Ейлера, який показує неминучу появу нелінійності в (1), і будь-яка модернізація цієї процедури викликає значні сумніви.

Отже, наша кінцева мета – знайти альтернативу підходу Ейлера і описати рух рідини рівнянням без нелінійних доданків, і, виходячи з

цього, побудувати загальний розв'язок рівняння Нав'є-Стокса.

Стан проблеми

Існує два способи, що описують рідину в русі, і обидва розглядають просторовий рух деякої частини рідини, розміщеної у достатньо малому (елементарному) об'ємі. Перший, запозичений з класичної механіки, використовує змінні Лагранжа. За принципом Даламбера

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla H + \nu \Delta \bar{u} \quad (4)$$

Ліва частина є повною похідною, тобто, елементарний об'єм рухається в просторі, як матеріальна точка, тоді як права частина – це сума всіх сил, прикладених до об'єму; і це є прийнятним, враховуючи подвійність у визначенні поняття елементарного об'єму.

Цей спосіб мало застосовується для руху рідини, оскільки переміщення відповідного об'єму має, як правило, скінченне значення протягом нескінченно малого часу, що порушує математичну коректність опису.

Ось чому в механіці рідини домінує інший спосіб, що використовує змінні Ейлера, де ми маємо справу з переміщенням відповідного елементарного об'єму в околі геометричної точки, довільно фіксованої. Це дозволяє описати його рух вектором швидкості $\bar{u}$ в цій точці, що в кінцевому підсумку призводить до появи додаткових членів у (4) і забезпечує цим математичну коректність опису у вигляді (1).

Для ідеальної рідини ($\nu=0$) і маємо рівняння Ейлера [1-3]

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\nabla \times \bar{u}) \times \bar{u} = -\nabla H \quad (5)$$

Ще одна особливість такого підходу полягає в тому, що $\bar{u}$ характеризує швидкість об'єму з скінченними розмірами (хоча і малими). Це випливає з теореми Гельмгольца [1,2,3], де показано, що швидкість $\bar{u}$ кожної частинки в об'ємі є сумою поступальної швидкості $\bar{u}_p$ деякого полюса (в об'ємі) і миттєвої швидкості обертання досліджуваного об'єму, як твердого тіла, навколо полюса

$$\bar{u} = \bar{u}_p + \varpi \times \bar{r}_p, \quad (6)$$

де $\bar{r}_p$ і ϖ – радіус-вектор та миттєва швидкість обертання об'єму в локальній системі координат з початком у полюсі.

Як результат, в аналізі виникають дві додаткові невідомі змінні. Щоб відійти від цієї ситуації, до рівняння Ейлера застосовується оператор

ротора, що виключає змінну $\bar{r}_p$ і, в кінцевому підсумку, призводить до нелінійного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_h}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\Omega}_h - (\bar{\Omega}_h \cdot \nabla) \bar{u} = \nu \Delta \bar{u}, \quad (7)$$

де $\nabla \times \bar{u} = 2\varpi = \bar{\Omega}_h$ – вихровий вектор, який традиційно використовується як визначальна характеристика обертального руху у рідині.

Звичайно, така дія можлива, якщо осі локальної системи відліку постійно паралельні осям абсолютної (інерціальної) системи координат.

Таким чином, опис руху середовища вимагає вирішення нелінійних рівнянь (1) та (7), що ускладнює проблему.

Альтернативний підхід

Вважатимемо, що час – абсолютний; всі процеси вивчаються в евклідовому просторі і розглядаються в абсолютній (інерціальній) системі відліку.

Ми також припускаємо, що геометричний простір містить матеріальне середовище, що складається з однакових частинок, які перебувають у русі, і лінійні розміри цих частинок невеликі порівняно з елементарним об'ємом, який містить їх достатньо багато для усереднення, однак має при цьому достатньо невеликий розмір, щоб дослідити його рух як матеріальної точки.

Тимчасово будемо вважати, що тангенціальні напруження відсутні ($\nu = 0$); з точки зору механіки континууму це означає, що вивчається ідеальна нестислива рідина.

Майже завжди фундаментальні фізичні закони відображають рух єдиної матеріальної точки, і ми маємо справу зі змінними Лагранжа, де параметри (a, b, c) мають постійні значення. У той же час, якщо деяка геометрична точка зафіксована, параметри (a, b, c) є змінними стосовно часу, тому що кожна матеріальна точка, що надходить туди, має власні величини цих параметрів, і ми отримуємо ($t, a(t), b(t), c(t)$). При цьому просторові координати обраної точки x, y, z залишаються фіксованими і не залежать від часу. Іншими словами, ми досліджуємо поведінку поля швидкості відносно часу у фіксованій геометричній точці.

Це дозволяє визначити рух точки у формі

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla \left(H + \frac{u^2}{2} \right). \quad (8)$$

Зауважимо, що у правій частині при цьому виникає додатковий доданок, який є кінетичною енергією елементарного об'єму у фіксованій геометричній точці на даний момент.

Тепер введемо до розгляду рухому систему відліку, початок якої співпадає з початком абсолютної системи, і припустимо, що вона обертається навколо початку з деякою миттєвою швидкістю $\bar{\Omega}$. У цьому випадку (індекс r вказує на цю рухому систему), як зазвичай,

$$\bar{u} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_r + \bar{u}_r, \quad (9)$$

і ліва частина (8) набуває форму

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}_r) + \frac{\partial (\bar{\Omega} \times \bar{r}_r)}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t}, \quad (10)$$

де права частина (10) записана в рухомій системі відліку. Підставивши у (8) і використовуючи (9), отримаємо

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \bar{\Omega} \times \bar{u} = -\nabla H, \quad (11)$$

де

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(\bar{\Omega} \times \bar{r}_r)^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} \quad (12)$$

Зауважимо, що $\bar{\Omega} \times \bar{u}$ в (11) – це половина сили Коріоліса.

Важливо зазначити, що $\bar{\Omega} \times \bar{r}_r$ – це миттєва швидкість обертального руху об'єму, розташованого у нерухомій точці на даний момент, навколо початку рухомої системи відліку. Оскільки цей вектор повністю описує обертальний компонент руху, ми обираємо вектор $\bar{\Omega} \times \bar{r}_r$ як визначальну характеристику обертального руху замість $\bar{\Omega}$, як зазвичай.

Рівняння Ейлера

Повернувшись до теореми Гельмгольца (6), ми жорстко зв'язуємо локальну систему координат, що введена там, із елементарним об'ємом; очевидно, що вони будуть обертатися разом з миттєвою кутовою швидкістю $\bar{\Omega}$.

Користуючись можливістю вільного вибору $\bar{\Omega}$, ми записуємо умову синхронізації обох систем (локальної і рухомої)

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}. \quad (13)$$

Тоді (5) і (11) збігаються з точністю до несуттєвого коефіцієнта при силі Коріоліса, і отримуємо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \bar{\Omega} \times \bar{u} = -\nabla H. \quad (14)$$

Але слід зазначити той факт, що, формально співпадаючи, ці рівняння суттєво відрізняються

способом опису обертального руху елементарного об'єму.

Слід також підкреслити, що визначення вектора (9) як суми швидкості рухомої системи координат та відносної швидкості в ній є традиційною, хоча і умовною ситуацією для класичної механіки; тому ми можемо діяти в інший спосіб і вважати, що права сторона (9) – це просто деяка відносна швидкість. У такому випадку рухома система відліку знаходиться в спокої, і ми можемо вважати, що вона збігається з абсолютною системою; тоді сила Коріоліса $\bar{\Omega} \times \bar{u}$ дорівнює нулю, і (14) набирає форму

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla \varphi, \quad (15)$$

де

$$\varphi = H + \frac{\bar{u}^2}{2}. \quad (16)$$

Підставляючи (9) у (15) і враховуючи незалежність обертального та поступального рухів, ми отримуємо для кожної складової швидкості (причому $r = r_r$)

$$\frac{\partial (\bar{\Omega} \times r)}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (18)$$

З (17) випливає, що $\bar{\Omega} \times r$ має бути нулем або функцією просторових координат. Перший випадок ($\bar{\Omega} = 0$) свідчить про відсутність будь-якого обертального руху у рідині. В іншому випадку обертальний рух викликано зовнішніми факторами, не пов'язаними з рухом рідини, тобто, $\bar{\Omega}$ є заданою змінною.

Повертаючись до (18), слід врахувати, що $\bar{u}_r$ є потенційним вектором, тобто, $\bar{u}_r = \nabla \psi$, де ψ – потенціал швидкості. Використовуючи умову нестисливості (2), можна записати рівняння Лапласа

$$\Delta \psi = 0, \quad (19)$$

що визначає поступальний рух відповідного об'єму. З іншого боку, рівняння (18), враховуючи (16), має форму

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2} = f(t), \quad (20)$$

де функція $f(t)$, або, зокрема, $f(t) = C = const$, визначається з відповідних граничних умов. Цей зв'язок називається інтегралом Коші – Лагранжа і для стаціонарних граничних умов він набуває форми добре відомої рівності Бернуллі

$$\Psi + \frac{p}{\rho} + \frac{u_r^2}{2} + \frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2} = C. \quad (21)$$

Очевидно, що ці рівності дозволяють знаходити тиск у рідині, якщо швидкість течії відома. Слід, однак, зазначити, що тепер вони включають також внесок зовнішньої завихреності (якщо така є), тобто вони є узагальненням існуючих на даний момент рівностей і можуть використовуватися для всього потоку в цілому, а не вздовж вибраної лінії току.

Таким чином, рішення рівняння Ейлера (5) визначається шляхом розв'язання рівняння Лапласа (19) та застосування рівності (20) або (21). Це означає, що існування, унікальність та гладкість рішення рівняння Ейлера (5) визначаються загальним рішенням рівняння (19).

Рівняння Нав'є-Стокса

При аналізі руху в'язкої рідини ($\nu \neq 0$) рівняння Ейлера (14) трансформується у рівняння Нав'є – Стокса (1).

Як зазначено вище, у нашому підході сила Коріоліса дорівнює нулю; після використання відомої формули векторного аналізу $\Delta u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$, умови нестисливості (2) і враховуючи рівність $u_r = \nabla \psi$, ми маємо

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\nabla \varphi, \quad (22)$$

$$\Delta(\bar{\Omega} \times r) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial(\bar{\Omega} \times r)}{\partial t} = 0. \quad (23)$$

Звідси випливає, що рух в'язкої рідини завжди містить обертальний компонент, що залежить від часу; у такому випадку $\frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2}$ не дорівнює нулю в (20) і (21).

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Нав'є – Стокса (1) – це комбінація загальних розв'язків рівнянь (22), (23). Очевидно, що його загальний розв'язок буде існувати, якщо відповідні

рішення цих рівнянь існують; унікальність і гладкість рівняння (1) визначається їх відповідними властивостями.

Висновки

Розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса та Ейлера є можливим після відмови від підходу Ейлера та модифікації традиційного фізичного опису досліджуваних процесів.

Запропонована процедура трансформує рівняння Нав'є-Стокса в рівняння Лапласа та дифузії; тобто, існування, унікальність та гладкість рішення рівняння Нав'є-Стокса, визначаються властивостями цих рівнянь. Виходячи з їх властивостей, можна відзначити, що в рівнянні Нав'є-Стокса (1) відсутні фізичні ефекти, які могли б бути відповідальними за породження вихорів у рухомих потоках рідини. Це означає, що ми маємо справу з формальним загальним рішенням диференціального рівняння (1), оскільки останнє буде описувати лише ламінарні течії. Зрозуміло, що ця ситуація має фізичну природу і, отже, потребує більш глибокого аналізу фізичної бази рівняння (1).

Запропонований шлях є пов'язаним з описом чисто механічного руху для в'язкого нестисливого середовища, а тому оцінка ефекту його стисливості є ще одним кроком у подальшій розробці розглянутого підходу.

З цієї ж причини ми не обговорюємо дисипативних ефектів, що відіграють важливу роль у рухомій в'язкій рідині, хоча така дискусія необхідна через опис обертального компонента в рухомій рідині нарівні з потенційним.

Зауважимо, що вищенаведені питання не є метою цієї публікації і будуть обговорюватися при публікації наступних частин нашого дослідження.

Список використаних джерел

1. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости / Дж. К. Бэтчелор. – Москва: Мир, 1973. – 758с.
2. Кочин Н.Е Теоретическая гидромеханика, т.1,2 / Н.Е. Кочин, И.А Кибель, Н.В Розе. – Москва: Физматгиз, 1963. – 583с., 727с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.1,2 / Л.И. Седов : Москва, Физматгиз, 1970. – 492с., 568с.

References

1. BATCHELOR, G.K (1973) *Vvedenie v dinamiku gidkosti*. Moskva: Mir.
2. Kochin, N.E., Kibel, I.A. and ROZE, N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidromekhanika*. v.1,2, Moskva: Fizmatgiz.
3. SEDOV, L.I. (1970) *Mekhanika splochnoi sredi*. v.1,2, Moskow: Fizmatgiz.