УДК 539.3

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.,
Мартиняк Р. М., д. ф.-м. н., проф.

**Термопружна поведінка біматеріалу з
міжфазною щілиною, заповненою
нестисливою рідиною**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Thermoelastic behavior of a bimaterial
with interface crack filled with an
incompressible fluid**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено термонапружений стан біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною. Задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілини та стрибка температури між берегами щілини. Тиск рідини на береги щілини визначено з умови нестисливості рідини. Побудовано аналітично-числову процедуру розв'язування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Проаналізовано залежності тиску рідини, розкриття щілини та коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень від прикладеного силового і теплового навантаження.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна щілина, нестислива рідина, тиск рідини.

Thermo-stressed state of the bimaterial with the interfacial crack filled with an incompressible fluid is investigated. The bimaterial with zero Dundurs parameter is considered. The thermo-elastic problem is reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for a temperature jump between the cracks faces and an opening crack. The pressure of the fluid is determined from the equation of the incompressible fluid. Using the method of successive approximations a numerical solution of the problem is constructed. The opening crack and temperature jump are determined by the finite sum for Chebyshev polynomials of the second kind. The coefficients for Chebyshev polynomials are determined from the system of linear algebraic equations. Having made numerical calculations, the dependences of the pressure of the fluid and the opening crack from the mechanical loads and density and direction of the heat flow have been constructed. The influence of fluid pressure on the stress intensity factor mode I are analyzed.

Key Words: bimaterial, interfacial crack, incompressible fluid, fluid pressure.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

На термопружний стан біматеріальних тіл істотно впливають розташовані на поверхні розмежування матеріалів дефекти: тріщини, щілини тощо. Середовище, яке заповнює ці дефекти, вносить свій вклад в розподіл міжфазних напружень, оскільки чинить тиск на поверхні дефектів і зумовлює передачу тепла між ними. У літературі відомі дослідження матеріалів з дефектами, заповненими газами та рідинами, де враховано окремо термічні чи механічні характеристики заповнювача [1-2]. Для міжфазних тріщин проаналізовано одночасно термічний і механічний вплив ідеального газу на напружено-

деформований стан двокомпонентного тіла [3]. Для рідини – заповнювача міжфазних тріщин вивчено лише вплив тиску на термопружну поведінку тіла [4].

У цій статті досліджено термопружну поведінку біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною, з урахуванням тиску і термоопору її заповнювача.

2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріальну площину, яка складається з півплощин D_1 і D_2 , що характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1 і α_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 , моду-

лями зсуву G_1 і G_2 . Вважаємо, що параметр Дандерса [5] біматеріалу рівний нулеві, тобто $G_1(1-2\nu_2) = G_2(1-2\nu_1)$. На міжфазній лінії біматеріалу розташована щілина, що має початкову висоту $h_0(x)$ і довжину $2a$ (рис. 1). Порожни́на щілини заповнена нестисливою рідиною з коефіцієнтом теплопровідності λ_f . Вважаємо, що рідина чинить тиск P_f на береги щілини.

Рис. 1. Біматеріал з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною

До біматеріалу на нескінченності прикладено перпендикулярні до міжфазної лінії однорідний стаціонарний тепловий потік q та рівномірно розподілені стискальні навантаження p . Паралельно міжфазній лінії до півплощин D_1 і D_2 на нескінченності прикладені лінійно розподілені по координаті y нормальні напруження S_1 і S_2 [5], які компенсують позовжню деформацію в напрямку осі Ox і глобальне викривлення границь півплощин, що зумовлені зусиллями p і тепловим потоком q .

Вплив теплопровідності рідини на теплопередачу між берегами щілини враховуватимемо [5] термоопором $r(x)$, пропорційним висоті щілини $h(x)$, що змінюється в процесі навантаження, і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_f : $r(x) = h(x)/\lambda_f$.

Тиск рідини P_f визначається з умови нестисливості рідини

$$\int_{-a}^a h(x) dx = \int_{-a}^a h_0(x) dx. \quad (1)$$

Поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Згідно з викладеною у праці [5] методикою сформульовану задачу зведено до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно висоти щілини $h(x)$ та стрибка температури між її берегами $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{K}{2}(-p + P_f) - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_0(t) dt}{t-x} \quad |x| < a, \quad (2)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| < a, \quad (3)$$

де $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1(1 - \kappa_2))$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$; $\eta_i = \alpha_i(1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічна дистортивність компонент біматеріалу D_i ; $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, $i = 1, 2$.

Шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a) = 0$, $\gamma(\pm a) = 0$.

Розв'язок системи (2), (3) з врахуванням умови (1) подамо у такому вигляді:

$$h(x) = h_0(x) + \frac{K}{2}(p - P_f)\sqrt{a^2 - x^2} + qh_\gamma(x), \quad (4)$$

$$\gamma(x) = q\gamma_q(x), \quad |x| < a; \quad (5)$$

$$P_f = p + \frac{4q}{Ka^2\pi} \int_{-a}^a h_\gamma(x) dx, \quad (6)$$

де $h_\gamma(x)$, $\gamma_q(x)$ – розв'язки системи рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_\gamma(t) dt}{t-x} = -\frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma_q(x), \quad |x| < a, \quad h_\gamma(\pm a) = 0; \quad (7)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma_q(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'_q(t) dt}{t-x} = 1, \quad |x| < a, \quad \gamma_q(\pm a) = 0. \quad (8)$$

Для розв'язування системи (7), (8) адаптовано аналітично-числову процедуру дослідження задачі термопружності для міжфазних тріщин [5].

5. Числові результати та їх аналіз

Для числових розрахунків вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, змінна $\bar{x} = x/a$, коефіцієнт теплопрові-

дності заповнювача $\bar{\lambda}_f = \lambda_f / \lambda$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = Kp$, тепловий потік $\bar{q} = qa\eta^-$, тиск рідини $\bar{P}_f = P_f K$, коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень [5] $\bar{K}_1 = K_1 K / \sqrt{a}$. Вважаємо, що термічні дистортивності (ТД) матеріалів різні ($\eta_1 \neq \eta_2, \eta^- \neq 0$).

Безрозмірний тепловий потік $\bar{q}$ набуває додатних значень ($\bar{q} > 0$), якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, та від'ємних ($\bar{q} < 0$), якщо до матеріалу з меншою ТД.

Числовий аналіз проведено для стискальних навантажень $\bar{p} = 0.001$ і форми щілини $\bar{h}_0(\bar{x}) = 0.001(1 - \bar{x}^2)^{3/2}$.

На рис. 2 проілюстровано залежність тиску рідини $\bar{P}_f$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$ і двох напрямів теплового потоку. Бачимо, що при збільшенні густини теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, тиск спадає, а для потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, – зростає. Збільшення коефіцієнта теплопровідності рідини приводить до зменшення її тиску. Різниця між значеннями тиску для двох протилежних напрямів теплового потоку зростає зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності рідини. При зменшенні густини теплового потоку тиск рідини наближається до значень стискальних зусиль $\bar{p} = 0.001$, заданих на безмежності.

Рис. 2. Залежність тиску рідини $\bar{P}_f$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних коефіцієнтів теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$.

Розподіл висоти щілини $\bar{h}(\bar{x})$ для двох напрямів теплового потоку $\bar{q}$ зі збільшенням його густини $|\bar{q}|$ зображено на рис. 3. Тут штрихова крива ілюструє початкову висоту щілини, суцільні чорні криві – висоту щілини за дії теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, суцільні сірі криві – висоту щілини за дії потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД. Бачимо, що за теплового потоку скерованого до матеріалу з більшою ТД, відбувається зменшення максимальної висоти щілини в її центрі та збільшення поблизу її країв. Водночас в малому околі країв щілина набуває форми близької до еліптичної на протизагу початковій щілині з берегами, що плавно зникаються. Для теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, форма щілини подібна до початкової і зі збільшенням густини потоку відбувається збільшення висоти на центральній частині та її зменшення на крайніх ділянках щілини, причому в деякому малому околі поблизу кінців щілини висота набуває від'ємних значень. Останній факт свідчить про те, що у випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, необхідно враховувати контакт берегів щілини на краях.

Рис. 3. Розподіл висоти щілини $\bar{h}(\bar{x})$ для двох напрямів теплового потоку за різних значень густини теплового потоку $|\bar{q}|$.

На рис. 4 проілюстровано залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень $\bar{K}_1$ від тиску рідини $\bar{P}_f$ для фіксованого коефіцієнта теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$. $\bar{K}_1$ спадає зі збільшенням тиску і може набувати навіть від'ємних значень для певних значень тиску, що відповідають діапазону зміни густини теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД. Цей

факт ще раз підтверджує необхідність врахування контакту берегів щілини по краях для теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД.

Рис. 4. Залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень $\bar{K}_I$ від тиску рідини $\bar{P}_f$.

6. Висновки

Досліджено термопружну поведінку біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестис-

ливою рідиною, з урахуванням тиску і теплопровідності рідини. Теплопровідність рідини враховано термоопором, що пропорційний висоті щілини і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності рідини. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно висоти щілини та стрибка температури між її берегами. Тиск рідини визначено з умови нестисливості рідини. Визначено залежність тиску рідини від густини і напрямку теплового потоку. Проаналізовано розподіл висоти щілини під дією теплового потоку та залежності коефіцієнтів інтенсивності нормальних міжфазних напружень від тиску та коефіцієнта теплопровідності рідини. Виявлено можливість появи контакту берегів щілини на прилеглих до її країв ділянках під дією теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю.

Список використаних джерел

References

1. Кит Г.С. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – № 9.
2. Евтушенко А.А. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью / А.А.Евтушенко, Г.Т. Сулим // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – 16, № 6. – С. 70–73.
3. Serednytska Kh. The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack / Kh. Serednytska, R. Martynyak, K. Chumak // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2019. – 57(2). – P. 331-341.
4. Kaczyński A. On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium / A. Kaczyński, B. Monastyrskyy // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2004. – 42, 1. – P. 41-57.
5. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
1. KIT, H. S. and POBEREGNYI, O. V. (1970) Termouprugoye sostoyaniye beskonechnogo tela s teploprovodyashchey krugovoy treshchenoy. *Teplovyye napryazheniya v elementah konstrukciy*. 9. p. 78-88.
2. YEVTUSHENKO, A. and SULYM, H (1980) Koncentraciya napruzhen' poblyzu shhilyny, zapovnenoyi ridynoyu. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*. 16 (6). p. 70-73.
3. SEREDNYTSKA, K., MARTYNYAK, R. M. and CHUMAK, K. (2019) The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 57(2). p. 331-341.
4. KACZYŃSKI, A. and MONASTYRSKYI, B. (2004) On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 42 (1). p. 41-57.
5. MARTYNYAK, R. M. and SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya migfaznyh trishchyn v bimaterialnyh tilah*. Lviv : Rastr-7.

Надійшла до редколегії 01.06.2019